152. Dati di posizione i punti A, I ed il centro del circoncerchio del triangolo $I_aI_bI_c$ costruire il triangolo.

153. Dati di posizione i punti A, O ed H del triangolo ABC, costruirlo.

154. Se PA, QA sono due rette *isogonali* rispetto all'angolo A, dimostrare che la retta che unisce i piedi delle perpendicolari condotte da P sui due lati dell'angolo è *antiparallela* alla retta che unisce i piedi delle perpendicolari condotte da Q sugli stessi due lati.

155. Costruire un triangolo conoscendone la mediana e la simediana che partono dallo stesso vertice ed uno dei lati.

156. Date l'altezza, la bisettrice e la simediana corrispondenti ad uno stesso vertice, costruire il triangolo.

157. Poi punti medi A', B', C' dei lati del triangolo ABC conduciamo le perpendicolari a questi lati. Pigliamo su di esse in grandezza e segno le lunghezze: $A'A_1 = B'B_1 = C'C_1 = \ell$. Dovendo essere $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ positivi, A_1, B_1, C_1 sono dalla stessa parte di BC, CA, AB dalla quale sono rispettivamente i vertici A, B, C. Dimostrare che il triangolo $A_1B_1C_1$ è minimo quando sia: $\ell = \frac{1}{2}R$, e calcolare i lati di questo triangolo e la sua area.

158. Essendo R' il piede della *essimediana* condotta da A dimostrare che la lunghezza AM è media proporzionale fra le lunghezze AR' ed RR'.

159. Dimostrare che se AP, AQ sono *isogonali* rispetto all'angolo A del triangolo ABC, è:

$$BP \cdot CP : BQ \cdot CQ = AP^2 : AQ^2$$

160. Se sui lati del triangolo ABC, internamente o esternamente costruiamo tre triangoli equilateri ABC', BCA', CAB', il punto *isogonale del centro d'omologia* dei due triangoli ABC, $A'B'C'$ è uno dei punti comuni ai tre *cerchi di Apollonio* di ABC.

Problemi di Geometria,

di Cristoforo Alasia, 1900

Questi problemi sono stati ricompilati da Francisco Javier García Capitán ed Ercole Suppa, nel 2008.

1. Dimostrare che il luogo dei vertici opposti dei triangoli aventi un lato in comune e per i quali è costante la somma del quadrati degli altri due lati è un cerchio il cui centro è il punto medio del lato comune.

2. Il luogo dei vertici opposti dei triangoli che hanno un lato in comune e per i quali è costante la differenza dei quadrati degli altri due lati è una retta perpendicolare al lato comune.

3. Construire il triangolo di cui è dato il lato BC, il raggio R ed il rapporto degli altri due lati.

4. Costruire il triangolo di cui è noto il lato BC, il raggio R del circoncerchio e la bisettrice AL.

5. Dato il lato BC, il raggio R del circoncerchio ed il prodotto delle distanze del vertice C dall'incentro I e dall'excentro I_a, costruire il triangolo.

6. Costruire il triangolo di cui è data la distanza dell'excentro I_a, dal centro O_9, del *cerchio di Feuerbach*, il raggio R del circoncerchio ed il lato BC.

7. Costruire il triangolo di cui si conosce il raggio R del circoncerchio, l'angolo in A e la distanza del vertice C dal baricentro G.

8. Costruire il triangolo di cui è noto l'angolo in A la distanza dal vertice A dall'ortocentro H e la distanza dal lato BC del baricentro G.

9. Conoscendo le lunghezze II_a, I_bI_c e l'angolo B costruire il triangolo.

10. Costruire il triangolo di cui è nota la distanza I_bI_c, il raggio r_9 del *cerchio di Feuerbach* e la distanza del baricentro G dal lato BC.

11. Se M è il punto medio dell'arco sotteso dal lato BC del triangolo ABC e D il punto di contatto dell'incerchio con questo lato, dimostrare che: $MD^2 = R(r_a - r) - rr_a$.

139. Dimostrare che se G_a, G_b, G_c sono le proiezioni del baricentro G sui tre lati del triangolo ABC, è:

$$G_aG_b : G_aG_c : G_bG_c := am_a : bm_b : cm_c$$

140. Costruire il triangolo ABC date le distanze I_bI_c ed AH e la somma dei quadrati delle proiezioni di AB e AC su BC.

141. Dato il rapporto $\frac{c}{b}$, il lato a e la differenza fra i quadrati delle distanze dell'ortocentro H dagli estremi di BC costruire il triangolo ABC.

142. Costruire il triangolo dati BC, m_a ed m_b.

143. Costruire il triangolo dati BC, h_a e B.

144. Costruire il triangolo dati BC, AX e la distanza $A'G$.

145. Dimostrare che nel triangolo ABC è verificata la relazione:

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2$$

146. Dimostrare che nel triangolo ABC è verificata la relazione:

$$\frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} = \frac{1}{r_a^3} - \frac{12R}{\Delta^2}$$

147. Costruire il triangolo di cui è noto il lato BC, la distanza di questo dall'ortocentro e l'altezza AX.

148. Costruire il triangolo di cui è noto un lato e le altezze corrispondenti agli altri due lati.

149. Dati due lati e la mediana corrispondente ad uno di essi, costruire il triangolo.

150. Dato un angolo, la mediana e l'altezza ad esso corrispondenti, costruire il triangolo.

151. Dati R, m_a e $c^2 + b^2$ costruire il triangolo ABC.

130. Data la distanza II_a, il raggio del circoncerchio del triangolo $I_aI_bI_c$, la distanza del punto medio del lato BC dal punto di contatto di esso coll'incerchio (I_b) e la somma $r_b + r_c$, costruire il triangolo ABC.

131. Costruire il triangolo ABC dati BC, AX e l'angolo formato da BY con AB.

132. Conoscendo la distanza del baricentro G dal lato BC, la distanza del circoncentro O da questo stesso lato e la differenza $(r_a + r_b + r_c) - r$, costruire il triangolo ABC.

133. Dati II_a, l'angolo C e l'angolo formato da m_b con b, costruire il triangolo.

134. Costruire il triangolo ABC data la distanza del vertice A dall'ortocentro H, la distanza del baricentro G dal lato BC e la distanza dell' incentro I dall'excentro I_a.

135. Dimostrare che nel triangolo ABC è verificata la relazione:

$$\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_a} + \frac{CI}{CI_a} = 1$$

136. Dimostrare che nel triangolo ABC è verificata la relazione:

$$\frac{AI_a}{AI} - \frac{BI_a}{BI_c} - \frac{CI_a}{CI_b} = 1$$

137. Dimostrare che nel triangolo ABC è verificata la relazione:

$$\frac{AI_a}{AI_a} + \frac{II_b}{BI_b} + \frac{II_c}{CI_c} = 2$$

138. Dimostrare che nel triangolo ABC è verificata la relazione:

$$\frac{I_bI_c}{AI_c} - \frac{II_b}{BI} + \frac{I_aI_c}{CI_a} = 2$$

12. Dimostrare che nel triangolo ABC una bisettrice interna ed i due segmenti su di essa determinati dall'incentro, sono direttamente proporzionali alla somma dei tre lati del triangolo, alla somma dei due lati adiacenti ed al lato opposto.

13. Dimostrare che una bisettice interna del triangolo ABC ed i segmenti che in essa determina l'excerchio relativo al lato opposto sono direttamente proporzionali alla somma dei due lati adiacenti meno il terzo lato, alla somma dei due lati adiacenti e al lato opposto.

14. Costruire il triangolo ABC conoscendone il raggio r, del suo cerchio di Feuerbach, la somma r_b+r_c dei raggi di due excerchi ed il prodotto delle distanze del vertice C dall'incentro I e dall'excentro I_a.

15. Costruire il triangolo conoscendo la distanza dei punti di contatto della base dall'incentro I e dall'excentro I_a e l'angolo formato dalla mediana m_a, col lato AC.

16. Dimostrare che nel triangolo ABC i due lati b e c stanno fra di loro come i segmenti determinati sul terzo lato dalla bisettrice dell'angolo opposto a questo.

17. Dimostrare che nel triangolo ABC risulta:

$$I_aI_b \cdot AI_a = I_aI_c(r_a + r_b) \quad , \quad I_aI_b \cdot BI_a = II_a(r_a + r_b)$$

$$I_aI \cdot r_b = I_bI_c(p - c) \quad , \quad I_aI \cdot r_c = I_bI_c(p - b)$$

18. Costruire il triangolo ABC dati il lato BC, il raggio R del circoncerchio ed il rapporto delle proiezioni dei lati c e b sul lato BC.

19. Costruire il triangolo ABC dati il lato a, il raggio R del circoncerchio e la distanza del vertice C dal baricentro G.

20. Conoscendo il lato BC, la distanza fra gli excentri I_b ed I_c e l'altezza AX_1, costruire il triangolo.

21. Costruire il triangolo ABC di cui è nota la base BC la differenza $r_a + r_b + r_c - r$ fra i raggi dei cerchi tangenti ai tre lati, e la distanza del baricentro G dal lato BC.

22. Costruire il triangolo di cui è noto un angolo, l'altezza corrispondente ad esso ed il raggio del suo *cerchio di Feuerbach*.

23. Costruire il triangolo di cui è notala distanza II_a il raggio r_9 del suo *cerchio di Feuerbach*, la somma $r_b + r_c$ ed il prodotto delle distanze di C da I ed I_a.

24. Costruire il triangolo di cui son note le tre mediane.

25. Costruire il triangolo ABC conoscendo la somma e differenza dei quadrati dei due lati b e c e la proiezione della mediana m_a sul lato a.

26. Costruire il triangolo di cui sono date le tre altezze.

27. Costruire il triangolo ABC conoscendone l'altezza AX, la proiezione di c e su a e la proiezione di a su c.

28. Costruire il triangolo di cui son dati i tre angoli ed il raggio del circoncerchio.

29. Costruire il triangolo ABC conoscendone l'altezza AX, la proiezione di AB su BC ed il raggio del circoncerchio del triangolo $I_aI_bI_c$.

30. Costruire il triangolo ABC dati i tre angoli e la lunghezza della bisettrice dell'angolo B.

31. Dimostrare che nel triangolo ABC si verificano sempre le relazioni:

$$\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AI_a^2} + \frac{1}{AI_b^2} + \frac{1}{AI_c^2} = \frac{4}{AX^2}$$

$$\frac{1}{BI^2} + \frac{1}{BI_a^2} + \frac{1}{BI_b^2} + \frac{1}{BI_c^2} = \frac{4}{BY^2}$$

ecc.

$$II_b^2 = I_bI_c \cdot AI_b - II_a \cdot AI$$

$$II_c^2 = I_aI_c \cdot BI_c - II_b \cdot BI_a$$

118. Costruire il triangolo ABC dati un lato BC, la differenza fra il prodotto degli altri due lati ed il quadrato della lunghezza della bisettrice dell'angolo A e la proiezione di AB su BC.

119. Conoscendo R, A e la distanza di C da O_9 costruire il triangolo ABC.

120. Costruire il triangolo dati due lati ed il raggio del suo *cerchio di Feuerbach*.

121. Costruire il triangolo dati due lati e la differenza $(r_a + r_b + r_c) - r$.

122. Costruire il triangolo dati un lato BC, l'angolo fatto con questo dall'altezza CZ e l'altezza BY.

123. Essendo dati di posizione i punti O, G ed X costruire il triangolo.

124. Costruire il triangolo dati un angolo, il perimetro ed il raggio del circoncerchio.

125. Costruire il triangolo dati di posizione i piedi delle sue altezze.

126. Costruire il triangolo ABC dati AC, R e la differenza dei quadrati delle distanze dell'ortocentro dagli estremi della base.

127. Costruire il triangolo dati un lato, l'altezza corrispondente ed il raggio del suo *cerchio di Feuerbach*.

128. Costruire il triangolo ABC dati BC, R e la distanza di O_9 da quel lato.

129. Costruire il triangolo di cui è noto un lato, il raggio del circoncerchio e la distanza fra l'incentro ed il centro del *cerchio di Feuerbach*.

106. Dimostrare che nel triangolo ABC si ha sempre:

$$BL \cdot CM \cdot AN : abc = abc : (b+c)(c+a)(a+b)$$

107. Date le distanze di O da a, di I_a dal vertice C ed il raggio r_9 costruire il triangolo.

108. Date le distanze II_a, I_bI_c e la distanza del baricentro G dal lato BC costruire il triangolo ABC.

109. Costruire il triangolo ABC dati il raggio del circoncerchio del triangolo $I_aI_bI_c$, l'angolo in A e la distanza del centro 0_9 del *cerchio di Feuerbach* dal lato BC.

110. Costruire il triangolo date la distanza del circoncentro O dal lato BC, la mediana AA' e la differenza $(r_a + r_b + r_c) - r$.

111. Costruire il triangolo ABC essendo dati il raggio r_9 del *cerchio di Feuerbach*, la distanza I_bI_c e la differenza dei quadrati delle distanze dell'ortocentro dagli estremi di BC.

112. Costruire il triangolo ABC dati il raggio R, la somma $r_a + r_b + r_c$ e differenza $c - b$.

113. Costruire il triangolo ABC conoscendone un angolo A e le mediane m_b, m_c.

114. Costruire il triangolo ABC di cui gli excentri I_a, I_b, I_c sono dati di posizione.

115. Dati di posizione i punti H, 0_9, X del triangolo ABC, costruirlo.

116. Nel triangolo ABC dimostrare le relazioni:

$$bc = BL \cdot CL + AL^2$$

$$bc = BL' \cdot CL' - AL'^2$$

117. Dimostrare le relazioni:

$$II_a^2 = I_aI_b \cdot CI_b - II_c \cdot CI$$

32. Dimostrare che nel triangolo ABC il rapporto fra il prodotto dei tre lati e la loro somma è costante ed uguale al doppio rettangolo del raggio dell' incerchio e del circoncerchio.

33. Dimostrare che essendo D, E, F i punti di contatto dell'incerchio coi tre lati BC, CA, AB del triangolo ABC e D_1, E_1, F_1 i punti di contatto degli stessi tre lati dell'excerchio (I_a), si ha:

$$[AEF] \cdot [BDF] \cdot [CDE] : [IEF] \cdot [IFD] \cdot [IDE] = \Delta^2 : r^4$$

$$[AE_1F_1] \cdot [BD_1F_1] \cdot [CD_1E_1] : [I_aE_1F_1] \cdot [I_aF_1D_1] \cdot [I_aD_1E_1] = \Delta^2 : r_a^4$$

34. Dimostrare che:

$$[I_aI_bI_c] \cdot [II_bI_c] \cdot [I_aII_c] \cdot [II_aI_b] = 16\Delta^2 R^4$$

35. Dimostrare che nel triangolo ABC il rapporto dell'area alla lunghezza, del perimetro è costante ed uguale al raggio dell'incerchio.

36. Essendo G_a, G_b, G_c le proiezioni del baricentro G del triangolo ABC sui tre lati di questo, mostrare che l'area del triangolo $G_aG_bG_c$ è:

$$[G_aG_bG_c] = \frac{4}{9}\Delta^3 \cdot \frac{m^2}{a^2b^2c^2}$$

37. Costruire un triangolo dati il raggio del circoncerchio, una bisettrice ed il rettangolo dei due segmenti da questa determinati sul lato corrispondente.

38. Costruire il triangolo di cui è data l'altezza, la mediana corrispondente ad un lato e la somma delle distanze del centro del *cerchio di Feuerbach* dai centri dei quattro cerchi tangenti ai tre lati.

39. Costruire il triangolo ABC da cui è data l'altezza e la mediana corrispondenti al lato BC ed il raggio dell'incerchio.

40. Costruire il triangolo di cui è dato il raggio del circoncerchio, il lato BC e l'angolo formato con questo lato della bisettrice dell'angolo opposto.

41. Costruire un triangolo dati il raggio del circoncerchio, il lato BC ed il prodotto delle distanze dell'incerchio dagli estremi di BC.

42. Costruire un triangolo data la distanza dell'ortocentro da un lato ed il raggio del circoncerchio.

43. Costruire un triangolo conoscendo il valore della differenza $(r_a + r_b + r_c) - r$, la distanza fra il baricentro ed un lato pur esso dato.

44. Costruire il triangolo ABC di cui è noto il raggio del circoncerchio, il lato BC e la differenza fra i due angoli B e C.

45. Costruire il triangolo ABC conoscendone la distanza fra i due centri I ed I_a, la somma $r_b + r_c$, la differenza $r_a - r$ e la differenza fra l'angolo in C e l'angolo formato dall'altezza AX con BC.

46. Dati il raggio dell' incerchio, l'altezza e la mediana corrispondenti ad uno stesso lato, costruire il triangolo e misurare colla *Geometrografia* la semplicità ed esattezza della costruzione.

47. Dati un angolo, l'altezza ed il raggio dell'incerchio ad esso corrispondenti, costruire il triangolo. Misurarne la costruzione.

48. Costruire il triangolo di cui è nota una delle altezze, il raggio dell'incerchio ed il perimetro. Misurarne le costruzione.

49. Costruire il triangolo ABC conoscendo le posizioni dei suoi tre elementi A, O ed O_9. Misurarne la costruzione.

50. Dimostrare che se U, V, W sono i punti medi dei segmenti AH, BH, CH, tali punti sono ortocentri rispettivamente dei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CA'B'$.

A_2, B_3, C_1. Mostrare che ciascuno dei triangoli $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ ha area quadrupla di quella del triangolo $A_1B_1C_1$.

95. Costruire il triangolo ABC conoscendone il rettangolo bc, la lunghezza della proiezione di c su a ed il raggio R del circoncerchio.

96. Costruire il triangolo ABC conoscendo m_a, R e $b^2 + c^2$.

97. Costruire il triangolo ABC dati il lato BC, l'altezza AX e l'angolo fatto dalla mediana BB' col lato AC.

98. Costruire il triangolo ABC dati R, A e la distanza O_9I_a.

99. Costruire il triangolo ABC dati BC, CZ ed il rapporto fra i due lati AB ed AC.

100. Costruire il triangolo ABC dati R, r ed A.

101. Rispetto al triangolo ABC dimostrare la relazione :

$$r_a^3 + r_b^3 + rc^3 + (4R + r)^3 - 12Rp^2$$

102. Rispetto allo stesso triangolo dimostrare la relazione:

$$\frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{12R}{\Delta^2} +$$

103. Costruire il triangolo ABC dati l'angolo in A, il raggio r, del *cerchio di Feuerbach* e la distanza del baricentro G da BC.

104. Dimostrare la relazione:

$$\frac{1}{LL'} - \frac{1}{MM'} + \frac{1}{NN'} = 0$$

105. Dimostrare la relazione:

$$\frac{a^2}{LL'} - \frac{b^2}{MM'} + \frac{c^2}{NN'} = 0$$

86. Dimostrare che fra le bisettrici interne o quelle esterne del triangolo ABC sussiste la relazione:

$$AL : AL' = (BM \cdot CN' - BM' \cdot CN) : (BM \cdot CN + CM' \cdot CN')$$

87. Dimostrare che fra i quattro centri dei cerchi tangenti ai tre lati di un triangolo sussistono le relazioni:

$$II_a \cdot II_b \cdot II_b : I_bI_c \cdot I_aI_c \cdot I_aI_b = r : p$$

$$II_a \cdot I_aI_c \cdot I_aI_b : I_bI_c \cdot II_b \cdot II_c = r_a : p - a$$

88. Costruire il triangolo conoscendone un'altezza, la differenza dei due angoli adiacenti al lato corrispondente a questa altezza ed il raggio dell' incerchio.

89. Costruire il triangolo ABC conoscendone un lato, la mediana e l'altezza corrispondente ad esso.

90. Costruire il triangolo ABC conoscendone un lato, uno degli angoli adiacenti e l'area A.

91. Costruire il triangolo ABC conoscendone l'altezza, la bisettrice e la mediana corrispondente ad uno stesso lato.

92. Dato il triangolo ABC dimostrare che:

$$AL' \cdot BM' \cdot CN' = \Delta \frac{32R}{p(b-c)(c-a)(a-b)}$$

93. Dato il triangolo ABC dimostrare che:

$$AL \cdot BM \cdot CN = 8\Delta^2 \frac{1}{h_a + h_b + h_c - r}$$

94. Per un punto M del piano del triangolo ABC conduciamo le tre parallele alle mediane AA', BB', CC' ad incontrare i lati BC, CA, AB rispettivamente nei punti A_1, B_2, C_3; A_3, B_1, C_2;

51. Mostrare che se la retta che unisce l'incentro al circoncentro di un triangolo passa per uno dei vertici di esso, il triangolo è isoscele.

52. Mostrare che l'area Δ' del triangolo LMN formato dalle bisetttrici interne di ABC è:

$$\Delta' = \frac{2\Delta}{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 1}$$

53. Dimostrare che in un triangolo ABC l'area è media proporzionale fra i prodotti $p(p-a)$ e $(p-b)(p-c)$.

54. Dimostrare che nel triangolo ABC si ha sempre

$$r^2 : r_a^2 = (h_a - 2r) : (h_a - 2r_a)$$

55. Dimostrare che nel triangolo ABC si ha sempre

$$(h_a - 2r)(h_b - 2r)(h_c - 2r) : (h_a + 2r_a)(h_b + 2r_b)(h_c + 2r_c) = r^4 : p^4$$

56. Dimostrare che nel triangolo ABC essendo G_a, G_b, G_c, le proiezioni del baricentro G sui lati, si ha : $G_bG_c : G_cG_a : G_aG_b = am_a : bm_b : cm_c$.

58. Dimostrare che la potenza dell'incentro I rispetto al circoncerchio è espressa da:

$$\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$$

e che la potenza dell'excentro I_a rispetto allo stesso circoncerchio è

$$\frac{abc}{b+c-a}.$$

59. Costruire il triangolo ABC data l'altezza h_a, il rapporto delle lunghezze delle proiezioni di b e c su a e l'angolo BAC.

60. Dati r, ra, ed il rettangolo cb, costruire ABC.

61. Costruire il triangolo di cui son noti gli elementi: h_a, m_a e bc.

62. Costruire il triangolo ABC conoscendo la differenza dei quadrati dei due lati AB e AC, il rapporto fra gli stessi due lati e la proiezione della mediana m_a sul lato BC.

63. Costruire il triangolo ABC conoscendone la proiezione di AB su BC, la proiezione di AA' su CB e l'altezza AX.

64. Costruire il triangolo ABC dati AX, AA' e $AB^2 + AC^2$.

65. Costruire il triangolo conoscendone il raggio del circoncerchio e le proiezioni di AA' e AL su BC.

66. Costruire il triangolo di cui son note l'altezza e la mediana corrispondenti ad uno stesso lato ed il raggio r_9, del suo cerchio di Feuerbach.

67. Costruire il triangolo di cui è nota la retta X_1Y_1 su cui è la base, nonchè il baricentro G ed il centro O_9, del *cerchio di Feuerbach*.

68. Costruire il triangolo ABC essendo noti di posizione i punti O, H ed X.

69. Costruire il triangolo ABC essendo dati di posizione i punti A, X ed Y.

70. Costruire il triangolo ABC dati di posizione i punti A, H ed O_9.

71. Costruire il triangolo ABC dato il lato BC, il raggio R del suo circoncerchio e la distanza del baricentro G da BC.

72. Costruire il triangolo ABC dati ancora BC, R e la distanza del vertice C dal centro O_9 del *cerchio di Feuerbach*.

73. Costruire il triangolo ABC di cui son noti r_a, r e BC.

74. Costruire il triangolo ABC di cui son noti R, BC ed il prodotto dei due segmenti determinati su questo lato dalla bisettrice corrispondente.

75. Costruire il triangolo ABC dati gli elementi A, R ed AX.

76. Costruire il triangolo ABC dati gli elementi BC, AA' e la somma o la differenza dei quadrati c^2 e b^2.

77. Costruire il triangolo ABC conoscendone il lato BC, la differenza fra il prodotto degli altri due lati e la lunghezza della bisettrice dell'angolo in A e la differenza fra i quadrati delle distanze dell'ortocentro dai due vertici B e C.

78. Costruire il triangolo ABC di cui son noti il lato BC, l'altezza AX e la proiezione di AB su BC.

79. Costruire un triangolo ABC conoscendone l'area Δ, il lato a ed il prodotto delle proiezioni di b e c su a.

80. Costruire il triangolo di cui son dati due lati e l'altezza, corrispondente ad uno di essi.

81. Costruire il triangolo conoscendone due lati e la differenza fra la somma dei raggi degli excerchi ed il raggio dell'incerchio.

82. Costruire il triangolo conoscendone due lati e la proiezione del terzo lato su uno di questi.

83. Costruire il triangolo date le lunghezze: II_a, I_bI_c ed AZ.

84. Costruire il triangolo ABC conoscendone l'angolo B, la bisettrice AL e la distanza di questa dal vertice C.

85. Dimostrare che nel triangolo ABC il prodotto delle distanze dell'incentro dai piedi delle tre bisettrici interne ed il prodotto di queste tre bisettrici stanno fra di loro come il prodotto dei raggi dell' incerchio e circoncerchio sta al doppio quadrato del semiperimetro.

288. Su di una retta AB quale base e da una stessa parte, possiamo, in generale, costruire sei triangoli simili ad uno stesso triangolo. I sei vertici opposti ad AB sono su di uno stesso cerchio. Dimostrare che i cerchi così ottenuti hanno ugual asse radicale.

289. Sia D_1E_1 una traversale qualunque del triangolo ABC e che incontra i lati b e c rispettivamente in D_1 ed E_1. Se per A conduciamo una nuova trasversale fino ad incontrare DE in E_2 e BC in D_2, mostrare che si determina un doppio rapporto:

$$\frac{AE_2}{D_1E_2 \cdot E_1E_2} : \frac{AD_2}{BD_2 \cdot CD_2}$$

che si mantiene costante qualunque sia la trasversale condotta per A.

290. Se Δ_1 è l'area del triangolo che ha per vertici i centri dei quadrati costruiti sui lati del triangolo ABC, esternamente, si ha:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = 1 + \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)$$

291. Dimostrare che la *potenza* dell'incentro di ABC rispetto al circoncerchio è il doppio prodotto dei raggi dell'incerchio e del circoncerchio (*Eulero, Nov. Comment. Petrop., II, 114. – Steiner-Jacobi, Giornale di Crelle*).

292. Il cerchio descritto su GH quale diametro seghi le tre altezze di ABC rispettivamente in a_1, b_1, c_1 le tre mediane in a_2, b_2, c_2. Dimostrare che i due triangoli $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ hanno per *simmediane* le rette a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 e che questi due triangoli ed il triangolo ABC hanno in comune il *punto di Lemoine*.

293. Servendoci dei dati del problema precedente dimostrare che i punti a_2, b_2, c_2 sono gli inversi, rispetto al triangolo ABC, dei vertici del *secondo triangolo di Brocard*.

294. Essendo D il punto di contatto dell'incerchio col lato BC, costruire il triangolo ABC conoscendo i raggi degli incerchi dei triangoli ABC, ABD, ACD.

161. Se V, V' sono i *centri isogonici* di ABC, è:

$$GO^2 + GV^2 + GV'^2 = R^2$$

162. Se da un punto P d'una retta che passa pel vertice C di ABC caliamo le perpendicolari su CA e CB, i piedi di queste perpendicolari sono su di una retta perpendicolare alla *isogonale* di CP.

163. Essendo AV, AF due rette isogonali del triangolo ABC conduciamo da V e V' le perpendicolari a CA e CB ad incontrare questi due lati rispettivamente in P, P', Q, Q'. Mostrare che si ha:

$$AP \cdot AP' : BQ \cdot BQ' = AC^2 : BC^2$$

164. Se tre rette concorrenti incontrano i lati di ABC in D, E, F, il cerchio passante per questi tre punti interseca i lati del triangolo fondamentale in tre altri punti D', E', F' tali che le rette AD', BE', CF' concorrono in uno stesso punto.

165. Mostrare che le perpendicolari calate dagli excentri sui lati corrispondenti del triangolo ABC sono concorrenti.

166. Se tre traversali angolari incontrano i lati del triangolo in tre punti in linea retta, le loro isogonali incontrano i tre lati in tre punti anch'essi in linea retta.

167. Se K_a, K_b, K_c sono le proiezioni del *punto di Lemoine* K sui tre lati del triangolo ABC, i lati di questo sono proporzionali ai lati del triangolo $K_aK_bK_c$.

168. Essendo AD e AD', BE e BE', CF e CF' delle coppie di rette isogonali, dimostrare che se D, E, F sono collineari, tali saranno pure D', E', F.

169. Se sui tre lati del triangolo ABC pigliamo i tre punti D, E, F che, li dividono in una stessa ragione, le parallele ad AD, BE, CF, od a BD, CF, AD od a CF, AD, BE condotte pei vertici

A_1, B_1, C_1 del *primo triangolo di Brocard* passano per uno stesso punto M, N o P.

170. Dimostrare che la distanza KK_a del *punto di Lemoine* K dal lato BC è espressa da:

$$KK_a = \Delta \frac{2a}{a^2+b^2+c^2}$$

171. Dimostrare che in ogni triangolo ABC si ha:

$$AK \cdot a : BK \cdot b : CK \cdot c = m_a a : m_b b : m_c -$$

172. Se la perpendicolare condotta dal circoncentro O su $A'K$ incontra il cerchio descritto con $A'K$ quale diametro in un punto P, dimostrare che è:

$$AB^2 + AC^2 = 4PU^2$$

essendo U l'estremo del diametro del circoncerchio di ABC che è perpendicolare a BC e che è rispetto a BC dallo stesso lato in cui è il circoncentro.

173. Dimostrare che nel triangolo ABC, essendo K il *punto di Lemoine* è:

$$AK^2 \cdot a^2 + BK^2 \cdot b^2 + CK^2 \cdot c^2 = 3\frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

174. Costruire il triangolo ABC conoscendo di posizione i punti A', L ed O_9.

175. Se con una delle altezze di un triangolo quale diametro descriviamo il cerchio, dimostrare che il triangolo determinato dal vertice da cui parte l'altezza e dai due punti d'intersezione di tal cerchio coi lati che concorrono in quel vertice, sta al triangolo dato come il quadrato dell'altezza che si è presa per diametro sta al quadruplo quadrato del raggio del circoncerchio del triangolo dato.

280. Dato il triangolo ABC e la direzione $B'C'$ di uno dei lati del triangolo ABC, trovare le direzioni dei lati $A'C'$, $A'B'$ in modo che i due triangoli ABC, $A'B'C'$ siano *triortologici con permutazione circolare* (*Lemoine*).

281. Nel triangolo ABC le *rette di Simson* di XYZ rispetto a ciascuno dei punti medi A', B', C' dei lati del triangolo, o di $A'B'C'$ rispetto ad uno dei punti X, Y, Z s'intersecano nel centro del *cerchio di Taylor* di ABC (*Tucker*).

282. Se pel punto inverso del *punto di Gergonne* conduciamo l'*antiparallela* ad un lato del triangolo ABC, la superficie del triangolo determinato da questa *antiparallela* e dai due altri lati del triangolo è la stessa, qualunque sia il lato che si considera, ed è espressa da (*Lemoine*):

$$\Delta \frac{R^2}{(R+r)^2}$$

283. Se il *cerchio di Brocard* del triangolo ABC è tangente al lato BC nel piede L della corrispondente bisettrice, è : $a^2 = 2bc$.

284. Dimostrare che nel triangolo ABC le rette $A\Omega'$, $B\Omega'$, $C\Omega'$ sono rispettivamente perpendicolari ai lati del triangolo formato unendo i piedi delle perpendicolari condotte da Ω sui lati di ABC.

285. Se la *retta di Brocard* $\Omega\Omega'$ passa per uno dei vertici di ABC, il lato opposto a questo vertice è medio proporzionale fra gli altri due lati.

286. Essendo Ω, Ω' i due *punti di Brocard* di ABC , mostrare che è:

$$\frac{\Omega A}{\Omega' A} \cdot \frac{\Omega B}{\Omega' B} \cdot \frac{\Omega C}{\Omega' C} = 1$$

287. Dimostrare che la retta che passa pel baricentro e pel centro del *primo cerchio di Lemoine* passa pel *punto di Tarry* del triangolo.

dei lati di P e P_1 e con ω e ω' loro *angoli di Brocard* e con δ il diametro del *cerchio di* Brocard comune, è:

$$\tan\omega = \cos\frac{\pi}{n} : \cos\frac{\pi}{n'}$$

$$\delta^2 \cos^2\frac{\pi}{n} = R^2 \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n'}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n'}\right)$$

274. La somma dei quadrati dei raggi dei *cerchi di Taylor* relativi al triangolo ABC è uguale al quadrato del diametro del circoncerchio di questo stesso triangolo (*Casey, Sequel of. . . . Euclid*).

275. Se le rette $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ segano i lati opposti in A_1', B_1', C_1' rispettivamente, si ha :

$$[ABC] : [A_1'B_1'C_1'] = \left(a^2 + b^2\right)\left(b^2 + c^2\right)\left(c^2 + a^2\right) : 2a^2b^2c^2$$

276. Essendo A_1', A_1'' i punti in cui le rette $A\Omega$, $A\Omega'$ incontrano rispettivamente il lato BC del triangolo ABC, dimostrare che affinchè il triangolo ABA_1'' sia isoscele deve essere:

$$b^4 = a^2\left(b^2 + c^2\right)$$

277. Col dato del problema precedente mostrare che affinchè il secondo triangolo ABA_1' sia isoscele deve essere:

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}$$

278. Dato un triangolo ABC e le direzioni $A'C'$, $A'B'$ di due lati di un triangolo $A'B'C'$, determinare la direzione di BC' in modo che i due triangoli ABC, $A'B'C'$ siano *ortologici* (*E. Lemoine, Congresso di Limoges*, 1890).

279. Il luogo dei punti inversi di ciascuno dei *punti di Brocard* rispetto ad uno dei *cerchi di Tucker*, è una retta.

176. Determinare i punti di contatto α, β, γ, δ dei cerchi tangenti ai tre lati del triangolo ABC col *cerchio di Feuerbach*.

177. Costruire il triangolo ABC dato il lato BC, il raggio R del suo circoncerchio e la distanza del vertice C dal baricentro G.

178. Costruire il triangolo ABC dato il lato BC e le distanze di A dall'ortocentro H e di G dal lato BC.

179. Costruire il triangolo dati un lato, il raggio del circoncerchio e somma $r_b + r_c$ o la differenza $r_b - r$.

180. Costruire il triangolo ABC dati BC, AB ed R.

181. Dimostrare che in ogni triangolo ABC è:

$$AK : AR = b^2 + c^2 : m^2$$

182. Dal *punto di Lemoine* K del triangolo ABC conduciamo le perpendicolari ai lati, ed unendone i piedi, formiamo un secondo triangolo. Mostrare che le mediane del primo triangolo sono rispettivamente perpendicolari ai lati del secondo.

183. Essendo P e Q due punti del lato BC del triangolo ABC tali che le rette AP, AQ siano *isogonali* rispetto all'angolo BAC, mostrare che è :

$$AB^2 : AC^2 = BP \cdot BQ : CP \cdot CQ$$

184. Prolunghiamo le *simmediane* AR, BS, CT del triangolo ABC fino ad incontrare il circoncerchio rispettivamente in R_1, S_1, T_1. Il triangolo $R_1S_1T_1$ ed il triangolo dato avranno lo stesso *punto di Lemoine*, gli stessi *punti di Brocard*, gli stessi *cerchi di Lemoine* e lo stesso *triangolo di Brocard*.

185. Se si hanno due triangoli inscritti l'uno all'altro, simili e *cosimmediani*, mostrare che il centro di similitudine di essi è il *punto di Lemoine* del triangolo esterno.

186. Dimostrare che se due triangoli sono *cosimmediani*, le mediane dell'uno sono proporzionali ai lati dell'altro.

187. Mostrare che due triangoli *cosimmediani* hanno uguale l'*angolo di Brocard*.

188. Sul lato AB di ABC costruiamo una serie di triangoli aventi l'angolo opposto C costante. Determinare il luogo del centro dei loro *cerchi di Feuerbach*.

189. Se da B caliamo le perpendicolari BP, BP' sulle bisettrici AL, AL' e da C le perpendicolari CQ, CQ' sulle stesse bisettrici, dimostrare che si ha:

$$PQ : AL = AC^2 - AB^2 : 2AC \cdot AB$$

$$P'Q' : AL' = AC^2 - AB^2 : 2AC \cdot AB$$

190. Colle notazioni stesse dell'esercizio precedente, mostrare che è:

$$[ABC] = AQ \cdot BP = AP \cdot CQ = AQ' \cdot BP' = AP' \cdot CQ'$$

191. Dimostrare che le rette IA', I_cB', I_bC' concorrono nel *punto di Lemoine* del triangolo II_bI_c.

192. Dalle notazioni del problema numero 183 dimostrare che i triangoli ABC, $R_1S_1T_1$ sono omologici ed hanno il *punto di Lemoine* K per *centro d'omologia*.

193. Determinare gli angoli formati dalla retta OK che unisce il circoncentro al *punto di Lemoine* coi tre lati di ABC.

194. Trovare il luogo geometrico dei centri dei cerchi passanti pel vertice C e che segano i lati CA e CB in due punti α, β, tali che: $a\alpha = b\beta = m$.

195. Se H è l'ortocentro del triangolo ABC, i cerchi descritti su CH e AB quale diametro sono ortogonali.

267. Essendo Ω uno dei *punti di Brocard*, se r_1, r_2, r_3 sono i raggi dei circoncerchi $(A\Omega B)$, $(B\Omega C)$, $(C\Omega A)$, si ha:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = R^3$$

268. Se le rette AA_1, BB_1, CC_1, che uniscono i vertici di due triangoli concorrono in un punto D, i lati corrispondenti di tali triangoli si segano in tre punti in linea retta.

269. Essendo d_a, d_b, d_c le distanze dell'ortocentro dai tre vertici del triangolo ABC, è:

$$d_a \cdot \frac{b^2+c^2}{bc} + d_b \cdot \frac{a^2+c^2}{ac} + d_c \cdot \frac{a^2+b^2}{ab} = 6R$$

270. Essendo G il baricentro del triangolo ABC mostrare che è:

$$\cot GAB + \cot GBC + \cot GCA = \cot GBA + \cot GCB + \cot GAC = 3\cot\omega$$

271. Se $ABCD$ è un *quadrilatero armonico* di cui è ω l'*angolo di Brocard*, mostrare che è:

$$\operatorname{cosec}^2\omega = cosec^2 A + cosec^2 B + cosec^2 C + cosec^2 D.$$

272. Se R' è il raggio del *secondo cerchio di Lemoine* d'un *poligono armonico* di n lati e δ, δ_1 sono i diametri del *cerchio di Lemoine* e del *cerchio di Brocard*, di esso, mostrare che è:

$$\delta^2 - \delta_1^2 = R'^2 \sec^2 \frac{\pi}{n}$$

273. Se P e P_1 sono due *poligoni armonici* che hanno gli *angoli di Brocard* complementari ed il *secondo cerchio di Lemoine* di P_1 coincide col cerchio circoscritto a P, indicando con n ed n' il numero

258. Essendo F, E', E, D', D, F' i vertici dell'*esagono di Lemoine* del triangolo ABC e se DE, DE' si segano in p, EF, $E'F'$ si segano in q, FD, $F'D'$ si segano in r, le perpendicolari p_a, p_b, p_c condotte dal *centro d'omologia* dei triangoli ABC, pqr rispettivamente sui lati di ABC verificano la relazione :

$$P_a : p_b : p_c = a^3 : b^3 : c^3$$

259. Se descriviamo tre cerchi ciascuno dei quali passi per due dei vertici del triangolo ABC e pel *punto* Ω *di Brocard*, il triangolo determinato dai centri di questi cerchi ha il circoncentro di ABC per *punto di Brocard*.

260. Se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono isogonali rispetto ad un triangolo, i rimanenti vertici sono pure isogonali.

261. Dimostrare che sei due *punti di Brocard* e due vertici del triangolo ABC appartengono ad uno stesso cerchio, il triangolo è isoscele (*Lemoine*).

262. Dimostrare che se la *retta di Brocard* del triangolo ABC è perpendicolare al lato BC, il centro del *cerchio di Brocard* è sulla mediana AA'.

263. Dimostrare che se due triangoli sono *triplamente ortologici*, i loro *angoli di Brocard* sono uguali.

264. Dimostrare che se due triangoli sono *doppiamente di-ortologici*, i loro *angoli di* Brocard sono uguali.

265. Dimostrare che i *punti di Nagel* J, J_1, J_2, J_3 sono *anticomplementari* dei punti I, I_a, I_b, I_c e che le rette IJ, I_aJ_1, I_bJ_2, I_cJ_3 concorrono nel baricentro G di ABC.

266. Essendo Ω, Ω' una coppia di *punti isogonali* rispetto al triangolo ABC proiettiamoli su BC, CA, AB in Ω_a, Ω_b, Ω_c, Ω'_a, Ω'_b, Ω'_c. Mostrare che le rette AO, BO, CO sono perpendicolari ai lati del triangolo $\Omega'_a\Omega'_b\Omega'_c$.

196. I lati opposti dei quadrati costruiti esternamente sui lati del triangolo ABC formano un triangolo $P_1P_2P_3$. Mostrare che le rette AP_1, BP_2, CP_3 passano pel *punto di Lemoine* K di ABC.

197. Mostrare che la somma dei quadrati delle tangenti condotte dai vertici di ABC al *cerchio di Lemoine* è:

$$\Sigma = 2\Delta \operatorname{cosec} 2\omega - 3R^2 \tan^2 \omega$$

198. Se le tangenti del numero precedente son condotte al *cerchio di Brocard*, è:

$$\Sigma = 2\Delta \operatorname{cosec} 2\omega$$

199. Determinare nel piano del triangolo ABC un punto Ω che soddisfi alla relazione :

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$$

200. Dimostrare che i due punti di Brocard Ω e Ω' formano una coppia di *punti reciproci*.

201. Dimostrare la stessa proprietà pei due punti O ed H.

202. Servendosi delle notazioni del problema numero 188, dimostrare che:

$$AP \cdot AQ \cdot BP \cdot CQ = AP' \cdot AQ' \cdot BP' \cdot CQ' = \Delta^2$$

203. Dimostrare che se *la retta di Brocard* $\Omega\Omega'$ del triangolo ABC è parallela al lato BC, è:

$$a^2 \left(b^2 + c^2\right) = b^4 + c^4$$

204. Costruire il triangolo ABC conoscendone l'angolo in A, la bisettrice BD dell'angolo in B ed il raggio r dell'incerchio.

205. Dati i due triangoli ABC, $A'B'C'$ qualunque, determinare due punti P, P_1 tali che i triangoli PAB, PAC, PBC siano rispettivamente simili ai triangoli $P_1A'B'$, $P_1A'C'$, $P_1B'C'$.

206. Essendo K, K_1, K_2, K_3 rispettivamente i *punti di Lemoine* dei triangoli ABC, AYZ, BXZ, CXY, mostrare che K è il punto medio delle perpendicolari condotte da K_1 su BC, da K_2 su CA, da K_3 su AB.

207. Essendo $K_aK_bK_c$ il triangolo determinato dalle proiezioni del *punto di Lemoine* K sui lati del triangolo ABC, mostrare che gli angoli di $K_aK_bK_c$, sono uguali agli angoli che le mediane fanno fra di loro.

208. Dimostrare in seguito all'esercizio 161 che l'area del triangolo OVV' è espressa da:

$$\Delta' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cot \frac{\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\left(a^2-b^2\right)}{\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2+\left(a^2-b^2\right)^2}$$

209. Dimostrare che in ogni triangolo ABC si ha:

$$BL \cdot CM \cdot AN : AL \cdot BM \cdot CN = R : 2p.$$

210. Costruire il triangolo ABC conoscendone il lato BC, la lunghezza della mediana BB' e quella della *simmediana* CT.

211. Dimostrare che le tre *simmediane* del triangolo ABC passano rispettivamente pei tre vertici del triangolo *polare reciproco* di esso, rispetto al circoncerchio.

212. Dimostrare che nel triangolo ABC si ha:

$$BL' \cdot CM' \cdot AN' : AL' \cdot BM' \cdot CN' = R : 2r.$$

213. Il luogo dei punti di concorso di due *rette di Simson* relative a due punti diametralmente opposti è il *cerchio di Feuerbach* (*Goffart*).

piedi di queste perpendicolari è:

$$\Delta'' = \frac{12\Delta^3}{n_c^4}$$

250. Dimostrare che i diametri dei circoncerchi dei triangoli ABG, BCG, CAG sono inversamente proporzionali ai segmenti AK, BK, CK.

251. Le tangenti condotte dai vertici A, B, C del triangolo fondamentale, al *cerchio di Brocard* sono rispettivamente proporzionali ad $1/a$, $1/b$, $1/c$.

252. Mostrare che i *triangoli polari reciproci* di due triangoli aventi le stesse *simmediane*, rispetto all'uno o all'altro dei *punti di Brocard*, comuni ad essi, sono due triangoli *cosimmediani*.

253. Dimostrare che le potenze P_A, P_b, P_c dei tre vertici A, B, C del triangolo ABC sono rispettivamente:

$$P_a = \frac{b^2c^2}{m^2} \quad , \quad P_b = \frac{a^2c^2}{m^2} \quad , \quad P_c = \frac{a^2b^2}{m^2}$$

254. Le potenze dell'esercizio precedente sono inversamente proporzionali ai quadrati dei lati opposti. E inoltre:

$$P_a : P_b : P_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

255. Dimostrare che se nel triangolo ABC il *primo punto di Brocard* è su BY ed il secondo su CZ, la retta KO è parallela a BC.

256. Se costruiamo il triangolo podario di un punto della *retta di Lemoine*, questo triangolo ed il triangolo fondamentale ABC hanno lo stesso *angolo di Brocard*.

257. Se pei vertici del triangolo ABC e per uno dei *punti di Brocard* conduciamo delle rette ad incontare il circoncerchio nei punti A_1', B_1', C_1', la figura $AB_1'CA_1'BC_1'$ è un *esagono di Lemoine*.

del triangolo fondamentale ABC; e la somma delle aree di quei due triangoli è media aritmetica fra le aree dei tre triangoli equilateri costruiti sui tre lati di ABC.

242. Descriviamo i tre cerchi $A(BC)$, $B(AC)$, $C(AB)$. Le tre altezze del triangolo ABC intersechino questi cerchi in X_1, Y_1, Z_1. Se ω e ω_1 sono gli *angoli di Brocard* di ABC e $X_1Y_1Z_1$, dimostrare che è:

$$\cot\omega_1 = \frac{2\cot\omega - 3}{2\cot\omega}$$

243. Colle notazioni del numero precedente, mostrare che è:

$$\Delta = \frac{1}{8}\cdot\frac{X_1Y_1^2 + Y_1Z_1^2 + X_1Z_1^2}{2\cot\omega - 3}$$

244. Se un triangolo $\alpha\beta\gamma$ di forma data e variabile è inscritto in un triangolo fisso ABC, e se i vertici di $\alpha\beta\gamma$ si muovono sui lati di ABC, il centro di similitudine F del triangolo $\alpha\beta\gamma$ in due qualunque delle sue posizioni è un punto fisso.

245. Si è visto che il triangolo ABC ed il triangolo $A'B'C'$ determinato dai punti medi dei lati di quello, sono due triangoli omotetici. Dimostrare che l'ortocentro, il baricentro ed il circoncentro di essi sono punti collineari.

246. Se uniamo i punti medi dei lati del *primo triangolo di Brocard* formiamo un triangolo che è omologo ad ABC.

247. Dimostrare che due triangoli *cosimmediani* ABC, $A_1B_1C_1$ hanno lo stesso *angolo di Brocard*.

248. I lati del triangolo pedale del triangolo ABC rispetto al *punto di Lemoine* K sono perpendicolari rispettivamente alle mediane del triangolo ABC.

249. Se il polo di BC, lato del triangolo fondamentale ABC e rispetto al circoncerchio, è A'' e da questo punto caliamo le perpendicolari sui lati di ABC, l'area Δ'' del triangolo formato dai

214. Colle notazioni del numero 188 mostrare che i due triangoli XPQ, $XP'Q'$ sono direttamente simili ed hanno i lati omologhi rispettivamente perpendicolari.

215. Dimostrare che i diametri dei circoncerchi dei due triangoli XPQ, $XP'Q'$ del numero precedente coincidono coll'*asse radicale* dei cerchi (I) ed (I_a); (I_b) ed (I_c).

216. Essendo D il punto di contatto dell'incerchio di ABC col lato BC e P il punto che divide il perimetro del triangolo in due parti uguali, mostrare che è:

$$2\cot\angle APB = \cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}$$

217. Costruire il triangolo ABC conoscendone l'angolo A, la bisettrice AL, e la mediana AA'.

218. Costruire il triangolo ABC dati BC, l'angolo formato da mb con b e l'angolo formato da m. con a.

219. Costruire il triangolo ABC dati un lato, un angolo adiacente ad esso e la bisettrice di questo angolo.

220. Costruire il triangolo ABC dati due lati e l'angolo formato dal terzo lato colla mediana ad esso corrispondente.

221. Costruire il triangolo ABC data la distanza II_a l'altezza h_a e la somma $r_b + r_c$.

222. Costruire il triangolo ABC conoscendo la distanza dei punti di contatto di BC coi cerchi (I) ed (I_a) e le distanze del vertice C dagli excentri I ed I_a.

223. Dimostrare che se si verifica la relazione:

$$\frac{BC\cdot AC}{R} = CC'$$

la *retta di Brocard* $\Omega\Omega'$ del triangolo ABC è perpendicolare all'*antiparallela* di AB.

224. Costruire un triangolo conoscendone un lato e la distanza di essoa dal *punto di Lemoine*.

225. Dimostrare che se dal punto *essimediano* K_1 conduciamo le perpendicolari su BC, CA, AB rispettivamente e ne indichiamo con K_1', K_2', K_3' i piedi, i triangoli K_1K_2', K_3', K_1K_3', K_1', K_1K_1', K_2', sono equivalenti ed hanno per area:

$$4\frac{\Delta^3}{m^4}$$

226. Dimostrare che la *retta di Lemoine* è *asse d'omologia* del triangolo ABC e del suo *polare reciproco* rispetto al circoncerchio.

227. Il *punto di Lemoine* d'un triangolo è baricentro del triangolo formato unendo le sue proiezioni sui lati del triangolo fondamentale.

228. Se sui tre lati di un triangolo si costruiscono tre figure *direttamente simili*, il luogo dei punti di concorso di tre rette omologhe è il *cerchio di Brocard*.

229. Dimostrare che ogni retta che passi per l'ortocentro di un triangolo sega i circoncerchi dei triangoli AYZ, BXZ, CXY in punti omologhi.

230. Trovare sulla *simmediana* condotta da A un punto P tale che i, segmenti su di essa determinati siano nel rapporto

$$\frac{b^2+c^2}{bc}$$

231. Dimostrare che la distanza del circoncentro da uno qualunque dei lati di ABC è metà della distanza dell'ortocentro dal vertice opposto a questo lato.

232. Dimostrare che le antiparallele alla *simmediana* condotta da A, rispetto agli angoli B e C segano il lato BC nei punti A_1, A_2 tali che: $BA_1 = CA_2$.

233. Sia ABC un triangolo dato: prolunghiamo CA in E e BA in F' tale che sia: $AE = AF' = BC$, prolunghiamo AB in F e CB in D' tale che sia: $BF = BD' = CA$, prolunghiamo BC in D e AC in E' tale che sia: $CD = CE' = AB$. Dimostrare che i punti D, D', E, E', F, F' appartengono allo stesso cerchio il cui centro e l'incentro di ABC. (Questo cerchio non è altro che il *cerchio di Taylor*).

234. Costruire il triangolo ABC conoscendone il vertice A, il circoncentro O ed il *punto di Lemoine* K.

235. Costruire il triangolo ABC conoscendone la *simmediana* AB e le distanze di questa da B e C.

236. Dimostrare che la *retta di Simson* del *punto di Tarry* del triangolo ABC è perpendicolare alla retta che unisce il baricentro al *punto di Lemoine*.

237. La retta che passa pel baricentro e pel centro del *secondo cerchio di Lemoine* del triangolo ABC passa pel *punto di Tarry*.

238. Dimostrare che se il centro di uno dei *cerchi di Tucker* del triangolo ABC divide la retta OK nel rapporto m/n il raggio ρ del *cerchio di Tucker* è espresso da:

$$\rho = \frac{\sqrt{mR'^2 + n^2R^2}}{m+n}$$

essendo R' il raggio del *secondo cerchio di Lemoine*.

239. Determinare la condizione necessaria affinchè il *cerchio di Tucker* di un triangolo si riduca al secondo *cerchio di Lemoine*.

240. Dimostrare che le diagonali $E'F'$ e DE, $F'D'$ e EF, $D'E'$ e FD dell'*esagono di Lemoine* $DD'EE'FF'$ si intersecano sulla polare del *punto di Lemoine* K rispetto al *primo cerchio di Lemoine*.

241. La differenza fra le aree dei triangoli RST, $R'S'T'$ determinati dai piedi delle mediane e delle essimediane è uguale all'area

295. Dimostrare che i circoncerchi dei triangoli AXG, BYG, CZG si segano in un punto dell'*asse d'omologia* dei triangoli ABC, XYZ.

296. Dimostrare che se il centro del *cerchio di Feuerbach* del triangolo ABC è sul lato AB si ha: $A - B = 90°$.

297. Se nel triangolo ABC è GK parallela ad AB, si ha:

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \qquad , \qquad m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

298. Se nel triangolo ABC *la retta di Eulero* OGH è parallela ad AB, è (*Neuberg*):

$$OH = R\,\mathrm{sen}(A - B) \qquad , \qquad \tan A \tan B = 3$$

$$\tan C = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B)$$

299. Se la retta che unisce il *punto di Gergonne* Γ al baricentro G è parallela al lato AB del triangolo ABC, si ha:

$$r_c = \frac{1}{2}(r_a + r_b) \qquad , \qquad \tan\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)$$

300. Dimostrare che se dal piede di una delle altezze di ABC si conducono le parallele agli altri due lati del triangolo, la radice quadrata dell'area di questo triangolo è uguale alla somma delle radici quadrate delle aree dei due triangoli determinati dalle parallele.

301. Essendo D, E, F i punti di contatto dell'incerchio coi lati di ABC e P il punto in cui tale incerchio tocca il *cerchio di Feuerbach*, il punto P ed il baricentro G' del triangolo DEF sono reciproci rispetto al *cerchio di Brocard* di ABC.

302. Costruire il triangolo ABC dati un lato, l'*angolo di Brocard* e l'angolo sotto il quale si vede BC dal baricentro G.

303. Costruire il triangolo ABC dato un angolo A e la lunghezza delle traversali angolari che partendo da A dividono il lato opposto in parti proporzionali ai numeri m, n, p.

304. In un triangolo isoscele i due *punti di Brocard* e due vertici del triangolo sono su di uno stesso cerchio.

305. I due fuochi dell'ellisse inscritta nel triangolo possono sempre esser considerati come formanti una coppia di punti inversi posti nell'interno del triangolo.

306. Determinare gli assi e l'eccentricità dell'ellisse che ha per fuochi i due *punti di Brocard* (*ellisse di Brocard*).

307. Date le direzioni delle simediane d'un triangolo, determinare le direzioni dei tre lati di esso (*Neuberg* e *Gob*).

308. Costruire il triangolo ABC conoscendone il *secondo triangolo di Brocard* $A_2B_2C_2$.

309. Le rette che uniscono i piedi delle rette $A\Omega$, $A\Omega'$, $B\Omega$, $B\Omega'$ sono tangenti alla parabola che tocca CA in A e CB in B.

310. Se l'*angolo di Brocard* di un triangolo è uguale ad un terzo di A, si ha:

$$b^2c^2 = \left(b^2 + c^2\right) = a^6 - 2a^2b^2c^2$$

311. Se la *retta di Brocard* di un triangolo è perpendicolare ad una *simmediana*, il triangolo è isoscele, e reciprocamente.

312. Se nel triangolo ABC i punti H_1', H_2', H_3' sono i punti medi dei segmenti AH, BH, CH rispettivamente, dimostrare che le *rette di Simson* dei vertici di uno dei triangoli XYZ, $A'B'C'$ rispetto all'altro concorrono nel baricentro del perimetro del triangolo XYZ (*Il baricentro del perimetro di un triangolo coincide coll'incentro del triangolo determinato dai punti medi dei suoi lati*).

313. Dimostrare che se un angolo di un triangolo è uguale alla somma dei due altri, la mediana passante pel lato opposto a quest'angolo è uguale alla metà di questo lato.

Dai Lemmi 1,2 segue che:

$$3\left(GV\right)^2=\left(AV\right)^2+\left(BV\right)^2+\left(CV\right)^2-AG^2-BG^2-CG^2=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\tfrac{2\Delta}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\tfrac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\tfrac{2\Delta}{\sqrt{3}}$$

e

$$3\left(GV'\right)^2=\left(AV'\right)^2+\left(BV'\right)^2+\left(CV'\right)^2-AG^2-BG^2-CG^2=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\tfrac{2\Delta}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\tfrac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\tfrac{2\Delta}{\sqrt{3}}$$

Pertanto, tenuto conto che $3\cdot GO^2=3R^2-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$, abbiamo:

$$3\cdot\left(GO\right)^2+3\cdot\left(GV\right)^2+3\cdot\left(GV'\right)^2=3R^2$$

e ciò completa la dimostrazione. $\square$.

314. Dimostrare che l' ellisse che tocca i tre lati del triangolo ABC nei piedi delle *simmediane* ed ha i due *punti di Brocard* per fuochi, ha per equazione:

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=0$$

315. Dimostrare che le lunghezze degli assi dell'ellisse precedente rispettivamente sono:

$$\frac{abc}{n^2}\quad,\quad\frac{a^2b^2c^2}{Rn^4}$$

316. Dimostrare che l'*ellisse di Steiner* del triangolo ABC è il luogo dei *centri d'ortologia* del triangolo ABC rispetto a tutti i triangoli *tri-ortologici* con esso.

317. Se sui due lati CA e AB di ABC prendiamo rispettivamente due punti P_1, P_2 che proiettiamo il primo su BC e BA ed il secondo su CA e CB, le rette che ne uniscono le proiezioni inviluppano una parabola P_b o P_c i cui fuochi sono B' o C' e le cui direttrici sono $C'A'$ od $A'B'$ (*Le due parabole P_b, P_c appartengono al gruppo di parabole studiate dal Tucker*, *Proceedings of the Edimb. Math. Society*, 1894).

318. Se ABC, $A'B'C'$ sono due triangoli qualunque, il luogo dei punti O ed il luogo dei punti O'' tali che OA, OB, OC siano rispettivamente parallele ad $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, sono *due coniche omotetiche* (*E. Lemoine* in *Mathesis*).

319. Se P è un punto del piano del triangolo ABC tale che le parallele a PA, PB, PC condotte per A, B, C concorrono in un punto P' e le parallele a PA, PB, PC condotte per C, A e B concorrono in P'', allora i due triangoli ABC, $PP'P''$ hanno la stessa *ellisse di Steiner*.

320. Essendo D, E, F, F_1 i punti in cui l'incerchio di ABC tocca i lati di questo triangolo ed il *cerchio di Feuerbach*, dimostrare che F_1 ed il baricentro G' di DEF sono reciproci rispetto al *cerchio di Brocard*.

321. Se sulle mediane di un triangolo quali diametri descriviamo i cerchi, questi, presi due a due hanno le altezze di questo stesso triangolo per *assi radicali*.

322. Coi vertici del triangolo ABC quali centri e con raggio rispettivamente uguale al lato opposto, descriviamo i cerchi. Dimostrare che il *cerchio di Longchamps* di tal triangolo è *ortotomico* a quei cerchi.

323. Essendo C una curva qualunque ed O un punto fisso, su di una secante da O alla curva C e che incontra questa in un punto A pigliamo: $AM = AN = a$. Costruire la tangente alla curva luogo dei punti M ed N determinata dalla rotazione della tangente attorno ad O (La curva luogo è chiamata *concoide* della curva C).

324. Dato il triangolo ABC descriviamo i cerchi $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(m_a)$, $B'(m_b)$, $C'(m_c)$. Se H_1 è il simmetrico dell'ortocentro H rispetto al circoncentro O, dimostrare che il punto H_1 è centro radicale comune del sistema dei sei cerchi predetti.

325. Date due rette parallele a, b, si piglino due punti del loro piano, uno P, fisso e l'altro p mobile. Per p conduciamo una secante qualunque che incontra a in p_a e b in p_b. Sia poi m' il punto d'incontro di Pp e della parallela a p_b condotta pel punto p. Se quest'ultimo descrive una curva C, il punto m' descrive un'altra curva *omologica* ad essa, e queste due curve avranno P e b per *centro ed asse d'omologia*.

326. Mostrare che se P è *polo d'inversione in una trasformazione per raggi vettori reciproci* ed $A_0B_0C_0$ è il triangolo formato dagli inversi dei vertici di un triangolo ABC, i lati di quest'ultimo sono proporzionali ai prodotti dei lati opposti del quadrangolo $PABC$.

327. Se si sottopongono ad *inversione* i vertici d'un triangolo i piedi delle *simmediane* ed i *poli* dei lati omologhi del triangolo

72. Il centro O_9 del cerchio di Feuerbach è l'intersezione della circonferenza h di centro M_a e raggio $R/2$ e della circonferenza k di centro C e raggio CO_9. L'intersezione di h e k determina O_9 e consente di tracciare la circonferenza di Feuerbach che interseca il lato BC nell'ulteriore punto H_a. La perpendicolare per H_a a BC determina il vertice A. □

161. Per la soluzione utilizziamo due lemmi

Lemma 1. Siano O, G il circoncentro e il baricentrodel triangolo ABC. Se P è un punto del piano del triangolo ABC sono verificate le relazioni:

$$PA^2+PB^2+PC^2 = GA^2+GB^2+GC^2+3\cdot GP^2 \qquad \text{(Leibnitz theorem)}$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$AG^2+BG^2+CG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Proof. Vedi N. Altshiller-Court, College geometry, second edition, pag. 70,71. □

Lemma 2. Se V e V' sono il primo e il secondo punto di Fermat di un triangolo ABC allora:

$$(AV)^2+(BV)^2+(CV)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{2\Delta}{\sqrt{3}}$$

$$(AV')^2+(BV')^2+(CV')^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) + \frac{2\Delta}{\sqrt{3}}$$

Proof. See http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=26139 □.

20. LEMMA. Due excentri di un triangolo ABC sono estremi di un diametro di un cerchio passante per i due vertici del triangolo che non sono allineati con gli excentri considerati. Inoltre il centro di questo cerchio coincide con il punto medio dell'arco di circoncerchio (O) di ABC individuato dai due vertici suddetti e contenente il terzo vertice.

Proof. Supponiamo che i due excentri siano I_b, I_c. Poichè $BI \perp BI_c$ e $CI \perp CI_c$ i punti B, C appartengono al cerchio γ di diametro I_bI_c. Inoltre poichè $\triangle ABC$ è il triangolo ortico di $I_aI_bI_c$, il punto medio di I_bI_c appartiene al circoncerchio di ABC (cerchio dei nove punti del triangolo excentrale). Infine il centro di γ è l'intersezione di γ con l'asse di BC, quindi coincide con il punto medio M dell'arco BC del circoncerchio (O) che contiene A. $\square$.

Supposto il problema risolto si tracci il circoncerchio e si determini il punto medio M dell'arco BC che contiene il vertice A. Per il LEMMA precedente il cerchio di centro M e raggio $MB = MC$ passa per I_b, I_c. Pertanto $MC = MB = d/2$ essendo $d = I_bI_c$ il segmento assegnato. Si può, pertanto determinare M e quindi il circoncerchio. Basta poi condurre la parallela al lato BC distante h_a da esso per determinare il vertice A. $\square$

21. Dalla nota relazione $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ possiamo costruire R e quindi il circoncerchio (O) di ABC. Detta K la proiezione di G su BC, dalla similitudine di $\triangle GM_aK$ e $\triangle AM_aH_a$ abbiamo:

$$AH_a = 3 \cdot GK$$

Pertanto il vertice A del triangolo richiesto è l'intersezione del cerchio (O) con la parallela alla retta BC distante $d = 3 \cdot GK$ da questa. $\square$

22. Basta ricordare che il raggio del circoncerchio è il doppio di quello del *cerchio di Feuerbach*. Il problema è allora ricondotto al problema noto: costruire ABC dati R, α, h_a. $\square$

dato e del suo trasformato sono il linea retta col *polo d'inversione* P.

328. Se si trasformano tre vertici di un quadrangolo qualunque prendendo, per *polo d'inversione* il quarto vertice, si ottengono quattro serie di triangoli simili fra di loro.

329. Mostrare che le rette che uniscono i vertici di un triangolo ABC ad uno dei *centri isodinamici* incontrano il circoncerchio in punti che sono vertici d'un triangolo equilatero.

330. Se i due punti P e Q sono *isogonali* rispetto al triangolo ABC, essi sono fuochi d'una conica inscritta in questo triangolo.

331. Se conduciamo i tre cerchi che sono tangenti esternamente a due degli excerchi del triangolo ABC ed internamente al terzo, quei tre cerchi passano per uno stesso punto (*Steiner*).

332. Mostrare, ricorrendo all'*inversione*, che il *cerchio di Feuerbach* di ABC è tangente all'incerchio ed ai tre excerchi.

333. Dati due triangoli ABC, $A'B'C'$ nello stesso piano, trovare il luogo dei punti M ed M' tali che le rette MA, MB, MC siano rispettivamente parallele alle rette $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$.

334. Consideriamo una serie di triangoli aventi un dato ortocentro e che sono coniugati ad una conica. Determinare il luogo degli incentri di questi triangoli.

335. Mostrare che se $T_1, T_2, \ldots$ sono dei triangoli inscritti ad un cerchio O e circoscritti ad un altro cerchio O', il semiprodotto dei diametri di questi cerchi è uguale, in valore assoluto, alla potenza del centro di O' rispetto al cerchio O.

336. Nei dati del problema precedente i due cerchi O, O' siano invece due *coniche coassiali*. Le normali alla conica O nei vertici dei triangoli T sono concorrenti. Mostrare che il luogo di questi punti di concorso è ancora una conica.

337. Determinare il luogo del secondo fuoco di una conica inscritta in un triangolo e della quale il primo fuoco è sulla *retta di Eulero* del triangolo.

338. La *retta di Eulero* del triangolo ABC interseca BC con un angolo α tale che:

$$\tan\alpha(\tan B - \tan C) = 3 - \tan B \tan C$$

Trovare la relazione che lega gli angoli α, β, γ che la *retta di Eulero* forma coi lati del triangolo.

339. Dato il triangolo ABC descriviamo i tre cerchi $A\,(r_a)$, $B\,(r_b)$, $C\,(r_c)$. Sia poi R_0 il raggio del loro cerchio ortogonale. Dimostrare che è (*Mat. Gaz.*):

$$R_0^2 = \frac{1}{61\Delta^2}\left(\sum a^2 r_a^4 - 2\sum r_b^2 r_c^2 bc\cos A - 2abc\sum r_a^2 a\cos A + a^2b^2c^2\right)$$

340. Sui lati del triangolo ABC descriviamo i quadrati. Siano C_a, C_b, C_c i centri di essi ed H l'ortocentro ABC. Conduciamo da questi centri le tangenti ai cerchi $HEAF$, $HFBD$, $HDCE$. Se t_r è una di queste tangenti, mostrare che:

$$\sum t_r^2 = 4\Delta(2\cot\omega + 3)$$

essendo $r = 1, 2, \ldots, 8$. (*Tucker*).

341. Mostrare che se una conica è circoscritta al triangolo di riferimento ed hai suoi semi-diametri paralleli ai tre lati del triangolo rispettivamente eguali a d_1, d_2, d_3, la sua equazione è:

$$\frac{a}{d_1^2 x} + \frac{b}{d_2^2 x} + \frac{c}{d_3^2 x} = 0$$

342. Nell'angolo A del triangolo di riferimento ABC conduciamo la bisettrice interna che incontra BC in L e la bisettrice esterna

che incontra lo stesso BC in L'. Allo stesso modo sui lati CA e AB pigliamo i punti M, M' ed N, N' rispettivamente. Mostrare che l'*asse radicale* comune ai tre cerchi di diametro LL', MM', NN' ha per equazione :

$$\left(b^2 - c^2\right) bcx + \left(c^2 - a^2\right) cay + \left(a^2 - b^2\right) abz = 0$$

343. Essendo G il baricentro del triangolo di riferimento, mostrare che esso è centro della conica rappresentata dall'equazione:

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} = 0$$

Soluciones

1. Sean BC es el lado común y A es el vértice opuesto, y M el punto medio de BC. Entonces la longitud de la mediana AM cumple

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = cost$$

es decir, el punto A está sobre una circunferencia de centro M. □

Observación. Il luogo dei punti A tali che $AB^2 + AC^2 = k^2$ è una circonferenza, detta **circonferenza di Roberval** relativa al segmento BC e alla costante k, avente centro nel punto medio M di BC e raggio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - BC^2}$$

19. Supposto il problema risolto si traccino le mediane AM_a, BM_b che si intersecano nel baricentro G. Il punto M_b appartiene al cerchio di diametro OC ed, altresì, al cerchio di centro B e raggio $BM_b = 3/2BG$. Il vertice A del triangolo richiesto è il punto di intersezione della retta CM_b con il circoncenchio. □