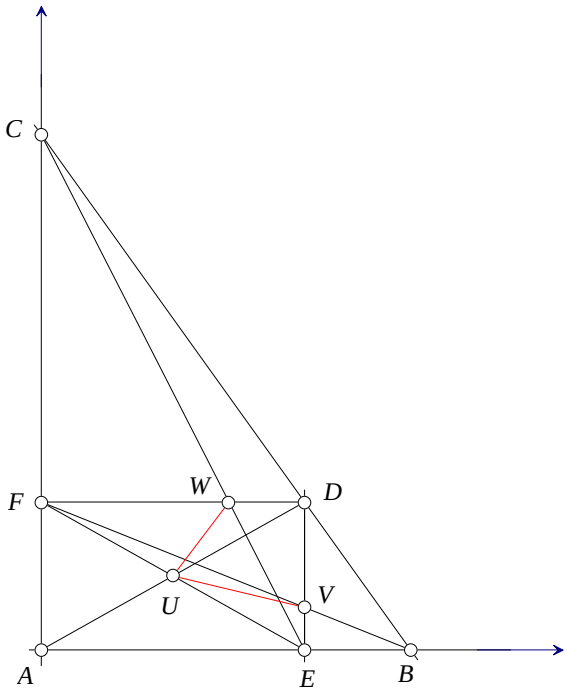
**Problema 227.** *Propuesto por Francisco Javier García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego, Córdoba*

Sean $ABC$ un triángulo rectángulo en $A$ y $D$ un punto sobre la recta $BC$ distinto de $B$ y $C$. Sean $E$ y $F$ las proyecciones ortogonales de $D$ sobre las rectas $AB$ y $AC$, respectivamente. Consideramos además los puntos de intersección $U = AD \cap EF$, $V = BF \cap DE$ y $W = CE \cap DF$. Probar que el triángulo $UVW$ es isósceles, con $UV = UW$, si y solo si $AD$ es una de las bisectrices trazadas por $A$.

*Primera solución enviada por Ercole Suppa, Teramo, Italy y Sebastiano Mosca, Pescara, Italy*

Sean $AB = c$, $AC = b$, $AE = m$, $AF = n$ y introducimos un sistema de coordenadas en el cual $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(0,b)$, $E(m,0)$, $F(0,n)$, $D(m,n)$, $U(m/2, n/2)$.




Las rectas $BC$, $BF$, $CE$ tienen ecuaciones

$$\begin{aligned} BC: &\quad bx + cy = bc \\ BF: &\quad nx + cy = nc \\ CE: &\quad bx + my = mb \end{aligned}$$

entonces

$$mb + nc = bc \tag{1}$$

de la que con cálculos sencillos tenemos

$$V\left(m, \frac{(c-m)n}{c}\right), \qquad W\left(\frac{m(b-n)}{b}, n\right)$$

y, en consecuencia

$$UV^2 = \left(\frac{m}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - \frac{(c-m)n}{c}\right)^2 = \frac{c^2m^2 + c^2n^2 - 4cmn^2 + 4m^2n^2}{4c^2}$$

$$UW^2 = \left(\frac{m}{2} - \frac{m(b-n)}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - n\right)^2 = \frac{b^2m^2 + b^2n^2 - 4bm^2n + 4m^2n^2}{4b^2}$$

Por lo tanto, $UV = UW$ si y sólo si

$$\frac{c^2m^2 + c^2n^2 - 4cmn^2 + 4m^2n^2}{4c^2} = \frac{b^2m^2 + b^2n^2 - 4bm^2n + 4m^2n^2}{4b^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{mn(bc^2m - b^2cn + b^2mn - c^2mn)}{b^2c^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

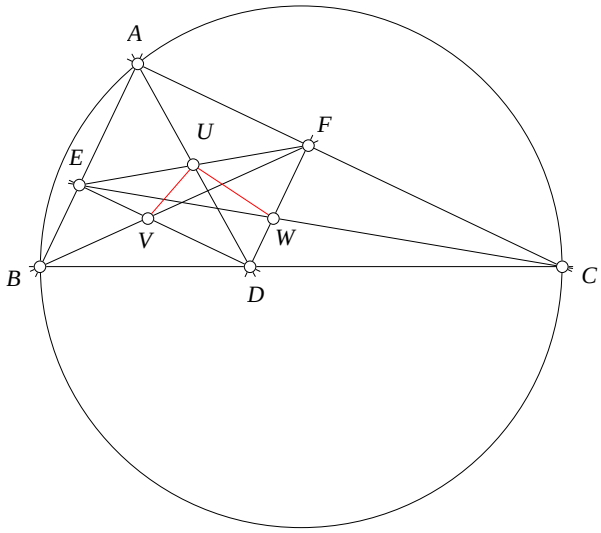
$$bc^2m - b^2cn + b^2mn - c^2mn = 0 \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos

$$\begin{cases} bm + cn = bc \\ bc^2m - b^2cn + b^2mn - c^2mn = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{bc}{b+c} \\ n = \dfrac{bc}{b+c} \end{cases} \vee \begin{cases} m = \dfrac{bc}{b-c} \\ n = -\dfrac{bc}{b-c} \end{cases}$$

es decir, $D(m,n)$ pertenece a la bisectriz interna de $\angle BAC$ de ecuación $y = x$ o a la bisectriz externa de $\angle BAC$ de ecuación $y = -x$. $\square$

*Segunda solución enviada por Ercole Suppa, Teramo, Italy y Sebastiano Mosca, Pescara, Italy*




Sean $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = AU$, $m = BD$, $m = DC$.

Desde la semejanza, aplicado a triángulos, como es el caso $\triangle BED \sim \triangle BAC$ se sigue que

$$BE : BA = BD : BC = ED : AC \quad \Rightarrow \quad BE = \frac{c}{a}m, \quad ED = \frac{b}{a}m \tag{1}$$

Desde la semejanza $\triangle DFC \sim \triangle BAC$ se sigue que

$$DF : AB = DC : BC = FC : AC \quad \Rightarrow \quad DF = \frac{c}{a}n, \quad FC = \frac{b}{a}n \tag{2}$$

Desde la semejanza $\triangle BEV \sim \triangle BAF$, teniendo en cuenta (1) y (2), se deduce

$$BE : BA = EV : AF \quad \Rightarrow \quad EV = \frac{BE \cdot AF}{BA} = \frac{b}{a^2}m^2 \tag{3}$$

y, en consecuencia

$$VD = ED - EV = \frac{b}{a}m - \frac{b}{a^2}m^2 = \frac{b}{a^2}m(a-m) = \frac{b}{a^2}mn \tag{4}$$

Desde la semejanza $\triangle CFW \sim \triangle CAE$, teniendo en cuenta (1) y (2), se deduce

$$CF : CA = FW : AE \quad \Rightarrow \quad FW = \frac{CF \cdot AE}{CA} = \frac{c}{a^2}n^2 \tag{5}$$

y, en consecuencia

$$WD = FD - FW = \frac{c}{a}n - \frac{c}{a^2}n^2 = \frac{c}{a^2}n(a-n) = \frac{c}{a^2}mn \tag{6}$$

Aplicando el teorema de coseno a los triángulos $\triangle EUV$ y $\triangle FUW$ tenemos

$$UV^2 = EU^2 + EV^2 - 2 \cdot EU \cdot EV \cdot \cos \angle UEV \tag{7}$$
$$UW^2 = FU^2 + FW^2 - 2 \cdot FU \cdot FW \cdot \cos \angle UFW \tag{8}$$

Finalmente, usando las fórmulas (1)-(8) tenemos que $UV = UW$ si y sólo si

$$EU^2 + EV^2 - 2 \cdot EU \cdot EV \cdot \cos \angle UEV = FU^2 + FW^2 - 2 \cdot FU \cdot FW \cdot \cos \angle UFW \qquad \Leftrightarrow$$

$$EV^2 - 2 \cdot EU \cdot EV \cdot \frac{ED}{EF} = FW^2 - 2 \cdot FU \cdot FW \cdot \frac{FD}{EF} \qquad \Leftrightarrow$$

$$EV^2 - EV \cdot ED = FW^2 - FW \cdot FD \qquad \Leftrightarrow$$

$$EV \cdot (ED - EV) = FW \cdot (FD - FW) \qquad \Leftrightarrow$$

$$EV \cdot VD = FW \cdot WD \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a^2} m^2 \cdot \frac{b}{a^2} mn = \frac{c}{a^2} n^2 \cdot \frac{c}{a^2} mn \qquad \Leftrightarrow$$

$$b^2 m^2 = c^2 n^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{b}{c} \tag{9}$$

Las relaciones (9) se producen si y sólo si $AD$ coincide con la bisectriz interna o con la bisectriz externa del ángulo $\angle BAC$. $\square$