Problema 433. Demostrar la veracidad de las siguientes proposiciones:

(a) En todo triángulo ABC se verifica la desigualdad

$$\cos A \cos B \cos C \leq (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)$$

(b) En todo triángulo acutángulo ABC se verifica la desigualdad

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$$

Vicario, V. (2007): Comunicación personal.

Tevita, M. (2006), American Mathematical Monthly (p. 406) como problema 11228 (Apartado a) Referencia ofrecida por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid, y miembro del comité editorial de esta revista.

Laisant, C.A. (1896) Geometrie du Triangle, Gauthier - Villars, Paris, p. 128, cuestión 436. Referencia ofrecida por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid, y miembro del comité editorial de esta revista.

Soluzione di Ercole Suppa.
(a) Utilizziamo le notazioni usuali del triangolo ABC, ossia denotiamo con a, b, c i lati BC, CA, AB, con A, B, C gli angoli, con s il semiperimetro, con O, I, H circoncentro, l'incentro, l'ortocentro, con R, r i raggi del cerchio circonscritto ed inscritto. La disuguaglianza proposta discende dalla nota identità:

$$IH^2 = 4R^2 \left[(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) - \cos A \cos B \cos C\right]$$

che ora, per completezza, dimostriamo.

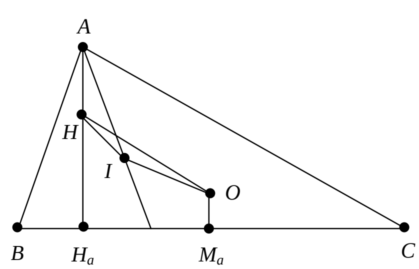

Fig. 1

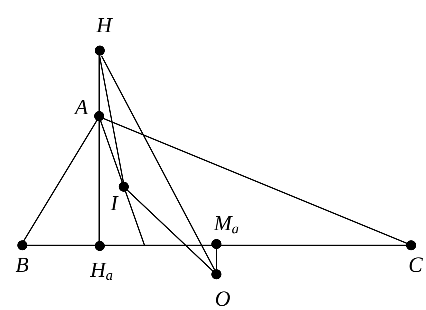

Fig. 2

Supponiamo, senza perdita di generalità che $a \geq b \geq c$ ed osserviamo che se $\triangle ABC$ è acutangolo (Fig.1) abbiamo:

$$\begin{aligned}\angle IAH &= \frac{A}{2} - (90^\circ - B) = 90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} - 90^\circ + B = \frac{B-C}{2} \\ AH &= 2OM_a = 2R\cos A\end{aligned}$$

mentre se $\triangle ABC$ è ottusangolo (Fig. 2) abbiamo:

$$\begin{gathered}\angle IAH = 180^\circ - \left[\frac{A}{2} - (90^\circ - B)\right] = 180^\circ - \frac{B-C}{2} \\ AH = 2OM_a = 2R\cos(180^\circ - A) = -2R\cos A\end{gathered}$$

Pertanto sia se $\triangle ABC$ è acutangolo che se è ottusangolo abbiamo:

$$AH \cdot \cos\angle IAH = 2R\cos A\ \cos\frac{B-C}{2} \tag{1}$$

Dalla nota relazione $r = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ abbiamo:

$$AI = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = 4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \tag{2}$$

Dal teorema del coseno applicato al triangolo $\triangle AIH$, tenuto conto di (1) e (2), discende che:

$$IH^2 = AH^2 + AI^2 - 2\cdot AH\cdot AI\cdot\cos\angle IAH =$$

$$= 4R^2\cos^2 A + 16R^2\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} - 16R^2\cos A\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2} =$$

$$= 4R^2\left[\cos^2 A + (1-\cos B)(1-\cos C) - 4\cos A\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right] =$$

$$= 4R^2\left[\cos^2 A + (1-\cos B)(1-\cos C) - 4\cos A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C - \cos A(1-\cos B)(1-\cos C)\right] =$$

$$= 4R^2\left[(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) + \cos A(\cos A - \operatorname{sen} B\operatorname{sen} C)\right] =$$

$$= 4R^2\left[(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) + \cos A\,(-\cos(B+C) - \operatorname{sen} B\operatorname{sen} C)\right] =$$

$$= 4R^2\left[(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) - \cos A\cos B\cos C\right]$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

(b) Sommando la disuguaglianza:

$$
\begin{aligned}
\tan A + \tan B &= \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B} = \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} C}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} \geq \\
&\geq \frac{2 \operatorname{sen} C}{1 + \cos(A+B)} = \frac{2 \operatorname{sen} C}{1 - \cos C} = 2 \cot \frac{C}{2}
\end{aligned}
$$

e le disuguagualianze analoghe che si ottengono permutando ciclicamente A, B, C abbiamo:

$$\sum \tan A \geq \sum \cot \frac{A}{2}$$

L'uguaglianza vi verifica se e solo se $\triangle ABC$ è equilatero. ■

Osservazione. Utilizzando la disuguaglianza (a) e l'identità

$$r = 4R \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

si dimostra facilmente la disuguaglianza di Gerretsen

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq s^2$$

Infatti, essendo:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = 8 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} = \frac{r^2}{2R^2}$$

e

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{s^2 - 4R^2 - 4Rr - r^2}{4R^2}$$

si ha che:

$$\frac{r^2}{2R^2} \geq \frac{s^2 - 4R^2 - 4Rr - r^2}{4R^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq s^2 \qquad ■$$