Problema 478

Sea ABC un triángulo donde el mayor de sus ángulos no supera $120°$ y sea Δ el área del mismo.

(a) Hallar el valor mínimo, exclusivamente en función de los lados a, b, c del triángulo, de la suma $AP+BP+CP$, siendo P un punto interior al mismo.

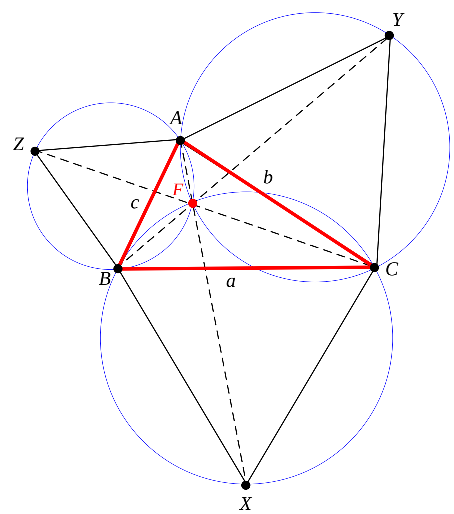
(b) Demostrar la desigualdad
$$(AP+BP+CP)_{\text{minima}} \geq 2\sqrt[4]{3}\sqrt{\Delta}$$

Vicario, V. (2008) Comunicación personal.

Soluzione di Ercole Suppa. E' noto che la somma $AP+BP+CP$ assume il minimo valore quando P coincide con $X(13)$ (=punto di Fermat del triangolo ABC).

Premettiamo il seguente lemma:

Lemma. Se F è il punto di Fermat del triangolo ABC allora, indicati con X, Y, Z i vertici dei triangoli equilateri costruiti esternamente ai lati di ABC, abbiamo $AX = BY = CZ = FA + FB + FC$.



Proof. Per il teorema di Carnot si ha:

$$AX^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) \tag{1}$$

$$BY^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) \tag{2}$$

$$CZ^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) \tag{3}$$

Da (1), (2), (3) segue facilmente che $AX = BY = CZ$.
Applicando il teorema di Tolomeo ai quadrilateri ciclici $AZBF$, $BXCF$, $CYAF$ abbiamo:

$$c\cdot(BF+AF) = c\cdot FZ \qquad \Rightarrow \qquad BF+AF = FZ \tag{4}$$

$$a\cdot(CF+BF) = a\cdot FX \qquad \Rightarrow \qquad CF+BF = FX \tag{5}$$

$$b\cdot(AF+CF) = b\cdot FY \qquad \Rightarrow \qquad AF+CF = FY \tag{6}$$

Sommando (4), (5) e (6) abbiamo:

$$2(AF+BF+CF) = FX+FY+FZ \tag{7}$$

Dalla (7), essendo $FX = AX - AF$, $FY = BY - BF$, $FZ = CZ - CF$, abbiamo $AF + BF + CF = AX$. $\square$

Dal Lemma discende che il minimo della somma $AP + BP + CP$ è dato da:

$$AF + BF + CF = AX = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\left(\cos C - \sqrt{3}\operatorname{sen} C\right)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 - ab\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \sqrt{3}\frac{2\Delta}{ab}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta}$$

e quindi, dalla disuguaglianza di Weitzenbock: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$, segue che:

$$AF + BF + CF \geq \sqrt{2\sqrt{3}\Delta + 2\sqrt{3}\Delta} = \sqrt{4\sqrt{3}\Delta} = 2\sqrt[4]{3}\sqrt{\Delta}$$

e ciò completa la dimostrazione. $\square$