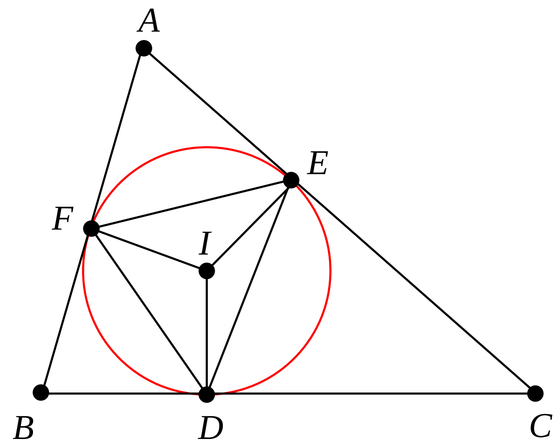
Problema 484

Sea S el área del triángulo y S_n el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. Es:

$$S = S_n \frac{2R}{r}$$

[Alasia, C., *La recente geometría del triangolo.* Cittá di Castello, (1900), pag. 339, n.564]

Soluzione di Ercole Suppa.



Il quadrilatero $AFIE$ è ciclico, pertanto $\angle FIE = 180° - A$. Pertanto:

$$[EIF] = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}(180° - A) = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} A \tag{1}$$

In modo analogo si dimostra che:

$$[DIF] = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} B \qquad , \qquad [DIE] = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} C \tag{2}$$

Da (1), (2) e dal teorema dei seni discende che:

$$S_n = [EIF] + [DIF] + [DIE] = \frac{1}{2}r^2 (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C) = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) = \frac{pr^2}{2R} \tag{3}$$

dove abbiamo indicato con $p = (a + b + c)/2$ il semiperimetro del triangolo $\triangle ABC$.
Dalla (3), tenuto conto che $S = pr$, si ottiene l'identità richiesta. $\square$