Problema 487

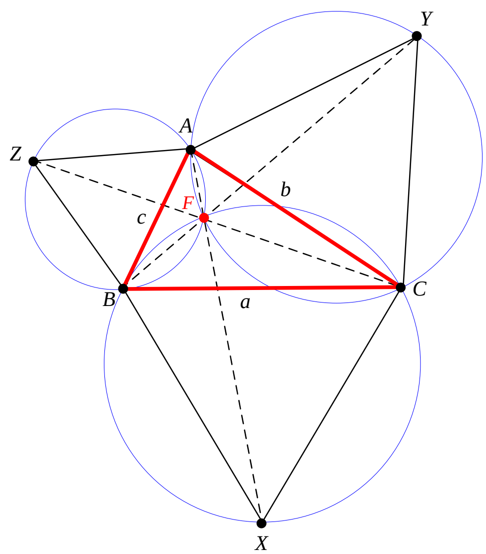
Sea ABC un triángulo en el que ninguno de sus ángulos supera $120°$. Sea G su baricentro y F su punto de Fermat (punto interior al triángulo cuya suma de distancias a los vértices es mínima). Demostrar que se cumplen las siguientes relaciones entre la distancia FG entre el Baricentro y el punto de Fermat, siendo Δ el área del triángulo:

(a) $$FG^2 = \frac{1}{18} \cdot \left[a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta\right]$$

(b) $$FG \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \min\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\}$$

Vicario, V. (2008) Comunicación personal.

Soluzione di Ercole Suppa.



(a) Premettiamo i seguenti lemmi:

Lemma 1. Se F è il punto di Fermat del triangolo ABC abbiamo:

$$FA + FB + FC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta}$$

Proof.
Indicati con X, Y, Z i vertici dei triangoli equilateri costruiti esternamente ai lati di ABC dal teorema di Carnot si ha:

$$AX^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) \tag{1}$$

$$BY^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) \tag{2}$$

$$CZ^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) \tag{3}$$

Da (1), (2), (3) segue facilmente che $AX = BY = CZ$.
Applicando il teorema di Tolomeo ai quadrilateri ciclici $AZBF$, $BXCF$, $CYAF$ abbiamo:

$$c \cdot (BF + AF) = c \cdot FZ \qquad \Rightarrow \qquad BF + AF = FZ \tag{4}$$

$$a \cdot (CF + BF) = a \cdot FX \qquad \Rightarrow \qquad CF + BF = FX \tag{5}$$

$$b \cdot (AF + CF) = b \cdot FY \qquad \Rightarrow \qquad AF + CF = FY \tag{6}$$

Sommando (4), (5) e (6) abbiamo:

$$2(AF + BF + CF) = FX + FY + FZ \tag{7}$$

Dalla (7), essendo $FX = AX - AF$, $FY = BY - BF$, $FZ = CZ - CF$, abbiamo:

$$\begin{aligned} AF + BF + CF = AX = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\left(\cos C - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, C\right)} = \\ = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \sqrt{3}\frac{2\Delta}{ab}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta} \end{aligned}$$

□

Lemma 2. Se F è il punto di Fermat del triangolo ABC abbiamo:

$$FA^2 + FB^2 + FC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{2\Delta}{\sqrt{3}}$$

Proof. Poniamo $u = FA^2 + FB^2 + FC^2$, $v = FA \cdot FB + FA \cdot FC + FB \cdot FC$. Dal Lemma 1 segue che:

$$u + 2v = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta \tag{8}$$

Dal teorema del coseno applicato ai triangoli FBC, FAC, FAB si ha:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= BF^2 + CF^2 - 2 \cdot BF \cdot CF \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ b^2 &= AF^2 + CF^2 - 2 \cdot AF \cdot CF \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ c^2 &= AF^2 + BF^2 - 2 \cdot AF \cdot BF \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad 2u + v = a^2 + b^2 + c^2 \tag{9}$$

Risolvendo il sistema formato da (8) e (9) otteniamo l'uguaglianza voluta. □

Lemma 3. (Leibnitz) Se G è il baricentro del triangolo ABC, per ogni punto P vale l'identità:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3 \cdot PG^2$$

Proof. Tenendo conto della nota identità $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} PG^2 = \left\|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{G}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{A}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{B}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{C}\right)\right\|^2 = \\ = \frac{1}{9}\sum PA^2 + \frac{1}{9}\sum 2 \cdot \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \\ = \frac{1}{9}\sum PA^2 + \frac{1}{9}\sum \left(PA^2 + PB^2 - c^2\right) = \\ = \frac{1}{9}\sum PA^2 + \frac{2}{9}\sum PA^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \\ = \frac{1}{3}\sum PA^2 - \frac{1}{3}\sum GA^2 \end{aligned}$$

□

Utilizzando i LEMMI 2,3 e la relazione $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ otteniamo l'uguaglianza richiesta:

$$\begin{aligned}
3 \cdot FG^2 &= FA^2 + FB^2 + FC^2 - \left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) = \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{2\Delta}{\sqrt{3}} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \\
&= \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta\right)
\end{aligned}$$

(b) Tenuto conto della disuguaglianza di Hadwiger-Finsler

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

si ha che:

$$\begin{aligned}
FG^2 &= \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta\right) \\
&\geq \frac{1}{18}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \\
&\geq \frac{1}{6} \cdot \min\left\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right\}
\end{aligned}$$

e, pertanto :

$$FG \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \min\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\}$$

$\square$

Osservazione. Si può dimostrare che anche il secondo punto di Fermat F' soddisfa l'analoga identità:

$$F'G^2 = \frac{1}{18} \cdot \left[a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\Delta\right]$$

Pertanto, dato che:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

si può dimostrare che i segmenti FO, $F'O$ e GO verificano l'uguaglianza:

$$OG^2 + FG^2 + F'G^2 = R^2$$

(Vedi *Alasia, La recente geometria del triangolo* , problema n.161, pag. 290).