Problema 603.

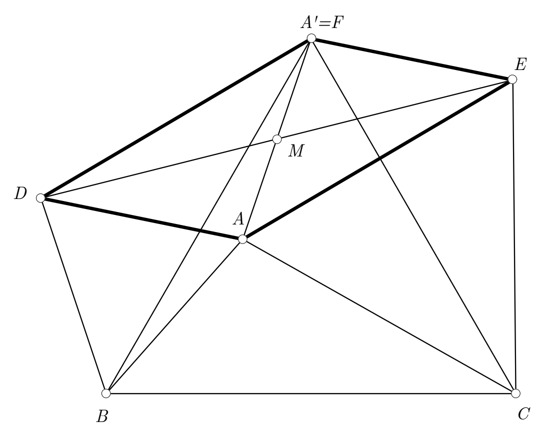
Sea ABC un triángulo. Construyamos un triángulo equilátero BAD sobre el lado AB, con D y C en distintos semiplanos respecto a AB. Construyamos un triángulo equilátero ACE sobre el lado AC, con B y E en distintos semiplanos respecto a AC. Construyamos el triángulo equilátero BCF, sobre el lado BC, con F y A en el mismo semiplano respecto a BC.

Demostrar que el cuadrilátero $AEFD$ es un paralelogramo.

Nunokawa, K., y Fukuzawa, T. (2002), Questions during Problem Solving with dynamic Geometric Software and Understanding Problem Situations, Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(D) Vol. 12, No. 1, 2002, pp. 31-43 (p. 32)

Soluzione di Ercole Suppa.

Nella soluzione di questo problema utilizzeremo i numeri complessi.



Detto M il punto medio di DE ed A' il simmetrico di A rispetto ad M, per provare che $AEFD$ è un parallelogramma sarà sufficiente far vedere che $A' = F$.

Indichiamo con lettere maiuscole i punti del piano e con lettere minuscole i rispettivi numeri complessi che li rappresentano: $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$, $M(m)$, $A'(a')$.

Ricordiamo che il punto $Z'(z')$ immagine del punto $Z(z)$ nella rotazione di centro $A(a)$ ed angolo θ è dato da:

$$z' = z \cdot e^{i\theta} + a\left(1 - e^{i\theta}\right)$$

Pertanto, essendo D il corrispondente di A nella rotazione di centro B ed angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$ abbiamo:

$$d = a \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + b\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\varepsilon^2 a - \varepsilon b$$

dove abbiamo indicato con $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ed $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ le due radici cubiche dell'unità diverse da 1.

Analogamente, essendo E il corrispondente di C nella rotazione di centro A ed angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$ abbiamo:

$$e = c \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + a\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = c\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\varepsilon^2 c - \varepsilon a$$

ed essendo F il corrispondente di C nella rotazione di centro B ed angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$f = c \cdot c^{i\frac{\pi}{3}} + b\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = c\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\varepsilon^2 c - \varepsilon b$$

Tenuto conto che $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} &m = \frac{d+e}{2} = \frac{-\varepsilon^2 a - \varepsilon b - \varepsilon^2 c - \varepsilon a}{2} = \frac{a - \varepsilon b - \varepsilon^2 c}{2} \qquad \Rightarrow \\ &a' = 2m - a = a - \varepsilon b - \varepsilon^2 c - a = -\varepsilon b - \varepsilon^2 c \end{aligned}$$

Pertanto $a' = f$ e la dimostrazione è completa. $\square$