Problema 606. Sea ABC un triángulo. Denotaremos por K, L y M, respectivamente, los puntos de intersección de las bisectrices interiores por A, B y C con los lados opuestos. Sea P un punto del perímetro del triángulo KLM y X, Y y Z, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC, CA y AB.

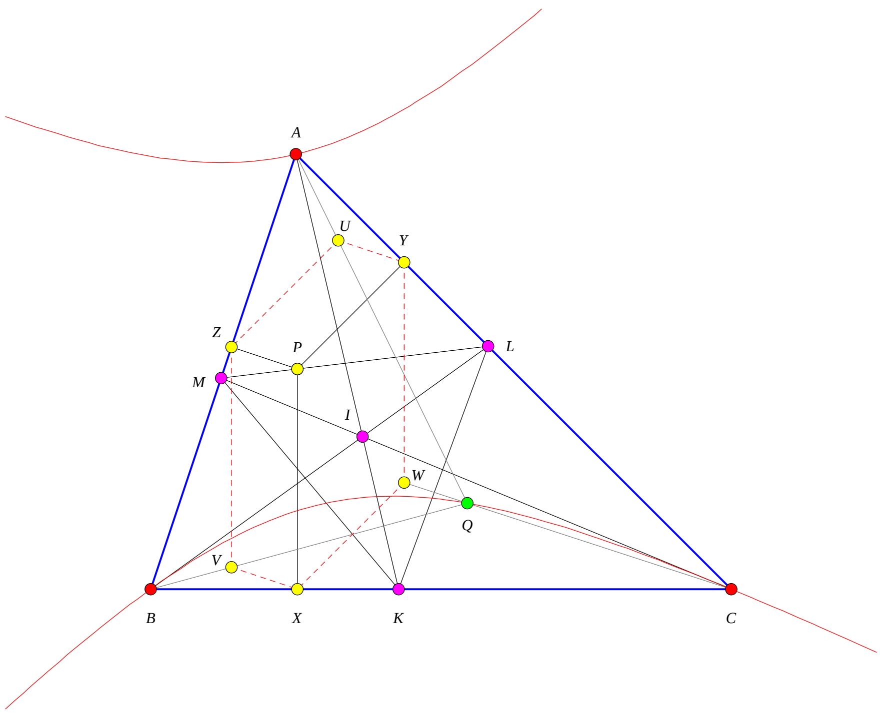
Sean U, V y W, respectivamente, los extremos de los vectores $\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{PY} + \overrightarrow{PZ}$, $\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PZ} + \overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PW} = \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}$, entonces las rectas AU, BV y CW son concurrentes en un punto Q. En en caso de que P recorra el lado LM, el punto Q está en el la hipérbola circunscrita al triángulo ABC, tangente en B y C a las bisectrices interiores y en A a la bisectriz exterior. Situación similar se tiene cuando P recorre los otros lados del triángulo KLM.

Caso particular:

Sean P_a, P_b y P_c, respectivamente, los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo KLM con los lados LM, MK y KL y Q_a, Q_b y Q_c los respectivos puntos de concurrencia del párrafo anterior. Entonces, las rectas AQ_a, BQ_b y CQ_c son concurrentes.

Propuesto por Ángel Montesdeoca Delgado, profesor del Departamento de Matemática Fundamental, Sección de Geometría y Topología, Universidad de La Laguna

Soluzione della prima parte, Ercole Suppa.



Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee rispetto al triangolo $\triangle ABC$. I calcoli sono svolti con il programma Mathematica mediante le routines contenute nel pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1]:

```
<< baricentricas`;
```

Calcoliamo le coordinate baricentriche dei punti K, L, M:

```
{ptK, ptL, ptM} = TrianguloCeviano[ptI]
{{0, b, c}, {a, 0, c}, {a, b, 0}}
```

Consideriamo ora un generico punto $P(u, v, w)$ e calcoliamo le sue proiezioni X, Y, Z sui lati BC, CA, AB:

[1] http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/

```
ptP = {u, v, w};
{ptX, ptY, ptZ} = TrianguloPedal[ptP]
{{0, (b^2 - c^2) u + a^2 (u + 2 v), (-b^2 + c^2) u + a^2 (u + 2 w)},
 {(a^2 - c^2) v + b^2 (2 u + v), 0, -a^2 v + c^2 v + b^2 (v + 2 w)},
 {(a^2 - b^2) w + c^2 (2 u + w), (-a^2 + b^2) w + c^2 (2 v + w), 0}}
```

Il punto U si ottiene costruendo il parallelogramma $PYUZ$ (vedi figura)

```
ptU = Punto[Paralela[ptY, Recta[ptP, ptZ]], Paralela[ptZ, Recta[ptP, ptY]]]
{c^2 (a^2 - c^2) v - b^4 w + b^2 (a^2 w + c^2 (2 u + v + w)), b^2 (-a^2 + b^2 + c^2) w, c^2 (-a^2 + b^2 + c^2) v}
```

Le coordinate dei punti V e W si possono ricavare da quelle di U utilizzando la funzione PermutarTerna[ ]

```
ptV = PermutarTerna[ptU]
{a^2 (a^2 - b^2 + c^2) w, -c^4 u + a^2 (-a^2 + b^2) w + c^2 (b^2 u + a^2 (u + 2 v + w)), c^2 (a^2 - b^2 + c^2) u}

ptW = PermutarTerna[ptV]
{a^2 (a^2 + b^2 - c^2) v, b^2 (a^2 + b^2 - c^2) u, b^2 (-b^2 + c^2) u - a^4 v + a^2 (c^2 v + b^2 (u + v + 2 w))}
```

Verifichiamo che le rette AU, BV, CW sono concorrrenti e determiniamo il loro punto di intersezione Q

```
SonPerspectivos[{ptA, ptB, ptC}, {ptU, ptV, ptW}]
True

ptQ = Perspector[{ptA, ptB, ptC}, {ptU, ptV, ptW}]
{a^2 v w, b^2 u w, c^2 u v}
```

Troviamo l'equazione del luogo γ_A descritto dal punto Q al variare di P sulla retta ML. Dato che:

```
Recta[ptM, ptL]
{b c, -a c, -a b}
```

la retta ML ha equazione $bcx - acy - abz = 0$ e il punto $P(u : v : w)$ soddisfa la condizione:

$$bcu - acv - abw = 0 \tag{1}$$

Le equazioni parametriche del luogo descritto dal punto $Q(a^2vw, b^2uw, c^2uv)$ sono date da

$$\begin{cases} x = a^2vw \\ y = b^2uw \\ z = c^2uv \end{cases} \tag{2}$$

L'equazione baricentrica di γ_A si ottiene eliminando u, v, w dalla (1) e la (2):

```
eqn = Eliminate[{x == a^2 v w, y == b^2 u w, z == c^2 u v, b c u - a c v - a b w == 0}, {u, v, w}]
x (c y + b z) == a y z

gammaA = Factor[First[eqn] - Last[eqn]]
c x y + b x z - a y z
```

Pertanto

$$\gamma_A : \qquad \frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 0 \tag{3}$$

e quindi γ_A è una circumconica.

Calcoliamo il discriminante di γ_A mediante la funzione DiscriminanteConica[ ]

```
DiscriminanteConica[gammaA]
```

$$\frac{1}{4}\left(a^2+2\,a\,b+b^2+2\,a\,c-2\,b\,c+c^2\right)$$

Essendo $a^2+2ab+b^2+2ac-2bc+c^2 = a^2+2ab+2ac+(b-c)^2 > 0$ possiamo affermare che γ_A è un'iperbole.

Verifichiamo che γ_A è tangente in B, C alle bisettrici interne ed è tangente in A alla bisettrice esterna:

```
TangenteConica[ptB, gammaA]
{c, 0, -a}
Recta[ptB, ptI]
{c, 0, -a}

TangenteConica[ptC, gammaA]
{b, -a, 0}
Recta[ptC, ptI]
{-b, a, 0}

TangenteConica[ptA, gammaA]
{0, c, b}
Perpendicular[ptA, Recta[ptA, ptI]]
{0, -c, -b}
```

Analoghi risultati si ottengono quando P varia su altri lati del triangolo KLM. $\square$