Problema 607.

Demostrar que el área de un triángulo ABC tiene por expresión

$$\frac{(p-a)^2\sin A+(p-b)^2\sin B+(p-c)^2\sin C}{2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)}$$

C.A. Laisant (1893): Arithmétique Algébre Elémentare.Trigonometrié. p.62
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez

Soluzione di Ercole Suppa. Sia $S=[ABC]$. Utilizzando le note formule

$$\sin A=\frac{2S}{bc},\qquad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

e le formule analoghe per gli angoli B e C abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}(p-a)^2\sin A&=2S\cdot\left[\frac{(p-a)^2}{bc}+\frac{(p-b)^2}{ac}+\frac{(p-c)^2}{ab}\right]=\\&=2S\cdot\frac{\left[a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2\right]}{abc}\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}2\sum_{\text{cyc}}\sin^2\frac{A}{2}&=2\cdot\left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc}+\frac{(p-a)(p-c)}{ac}+\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\right]=\\&=2\cdot\frac{a(p-b)(p-c)+b(p-a)(p-c)+c(p-a)(p-b)}{abc}\end{aligned}\tag{2}$$

Dalla (1) e la(2) discende che

$$\begin{aligned}&\frac{(p-a)^2\sin A+(p-b)^2\sin B+(p-c)^2\sin C}{2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)}=\\&=S\cdot\frac{a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2}{a(p-b)(p-c)+b(p-a)(p-c)+c(p-a)(p-b)}=\\&=S\cdot\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-b^2c-ac^2-bc^2+6abc}{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-b^2c-ac^2-bc^2+6abc}=\\&=S\end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. □