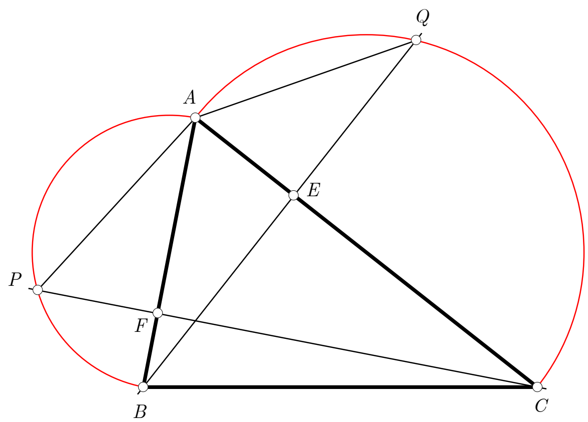
Problema 610. Dados los lados AB y AC de un triángulo acutángulo ABC, se construyen exteriormente al triángulo, semicírculos teniendo estos lados como diámetros. Las rectas conteniendo las alturas relativas a los lados AB y AC cortan esos semicírculos en los puntos P y Q. Demostrar que $AP = AQ$.

Eureka!, (1999), Problema Número 4, pag 19
Sociedade Brasileira de Matemática.

Soluzione di Ercole Suppa.

Indichiamo con E, F i piedi delle altezze el triangolo ABC, relative ai lati AC, AB rispettivamente.



Dai triangoli rettangoli ABE ed AFC otteniamo

$$AE = AB \cdot \cos A = c \cdot \cos A, \qquad AF = AC \cdot \cos A = b \cdot \cos A \qquad (*)$$

Dalla (*) e dal primo teorema di Euclide applicato ai triangoli rettangoli APB e ACQ abbiamo:

$$AP^2 = AB \cdot AF = c \cdot (b \cdot \cos A) = bc \cos A$$
$$AQ^2 = AC \cdot AE = b \cdot (c \cdot \cos A) = bc \cos A$$

Pertanto:

$$AP^2 = AQ^2 \qquad \Rightarrow \qquad AP = AQ$$

e la dimostrazione è completa. $\square$