Problema 620. Dado un triángulo ABC, encontrar E sobre la recta BC, F sobre AC y G sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CE^2 = AB^2 + BE^2$$
$$BA^2 + AF^2 = BC^2 + CF^2$$
$$CA^2 + AG^2 = CB^2 + BG^2$$

Demostrar que las cevianas AE, BF y CG concurren.

Propuesto por Barroso, R. (2011)

Soluzione di Ercole Suppa.

Posto $BE = \lambda$ abbiamo

$$b^2 + \lambda^2 = c^2 + (a-\lambda)^2 \qquad \Rightarrow \qquad BE = \lambda = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

Pertanto

$$EC = a - \lambda = a - \frac{a^2+b^2+c^2}{2a} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{BE}{EC} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2} \tag{1}$$

Analogamente si trova che

$$\frac{CF}{FA} = \frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+a^2-c^2} \tag{2}$$

$$\frac{AG}{GB} = \frac{c^2+a^2-b^2}{c^2-b^2-a^2} \tag{3}$$

Da (1), (2), (3) abbiamo

$$\frac{CF}{FA} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1$$

e quindi, la conclusione discende dal teorema di Ceva. □