Problema 622

Sea ABC un triángulo isósceles en B, con base b variable, y lados iguales $a = c$, fijos. Denotamos por R, el radio de su círculo circunscrito, y por r, el radio de su círculo inscrito. Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{b\to a} \frac{R - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.

Siano s, Δ il semiperimetro e l'area del triangolo ABC, sia H il piede della perpendicolare condotta da B su AC, e poniamo $t = b/a$. Utilizzando il teorema di Pitagora abbiamo:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{b \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{1}{4} a^2 t \sqrt{4 - t^2}$$

Dalle note formule $r = \Delta/s$ e $R = abc/4\Delta$ segue che:

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{1}{4}a^2 t\sqrt{4-t^2}}{\frac{1}{2}a(2+t)} = \frac{at\sqrt{4-t^2}}{4+2t} \tag{1}$$

$$R = \frac{a^2 b}{4\Delta} = \frac{a^3 t}{a^2 t \sqrt{4-t^2}} = \frac{a}{\sqrt{4-t^2}} \tag{2}$$

Tenuto conto di (1) e (2), possiamo calcolare il limite proposto mediante il teorema di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to a} \frac{R - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}} &= \lim_{b\to a} \frac{\frac{a}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{at\sqrt{4-t^2}}{4+2t} - \frac{a\sqrt{3}}{6}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{2(2+t)\left(-3+\sqrt{3}\sqrt{4-t^2}\right)}{\sqrt{4-t^2}\left(2\sqrt{3}+t\sqrt{3}-3t\sqrt{4-t^2}\right)} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{\frac{2\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{3}t-2\sqrt{3}t^2-3\sqrt{4-t^2}\right)}{\sqrt{4-t^2}}}{\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}t-2\sqrt{3}t^2+6t^2\sqrt{4-t^2}-3(4-t^2)^{3/2}}{\sqrt{4-t^2}}} \\
&= \lim_{t\to 1} \frac{2\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{3}t-2\sqrt{3}t^2-3\sqrt{4-t^2}\right)}{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}t-2\sqrt{3}t^2+6t^2\sqrt{4-t^2}-3\left(4-t^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{-6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-9\sqrt{3}} = \\
&= 2
\end{aligned}$$

□