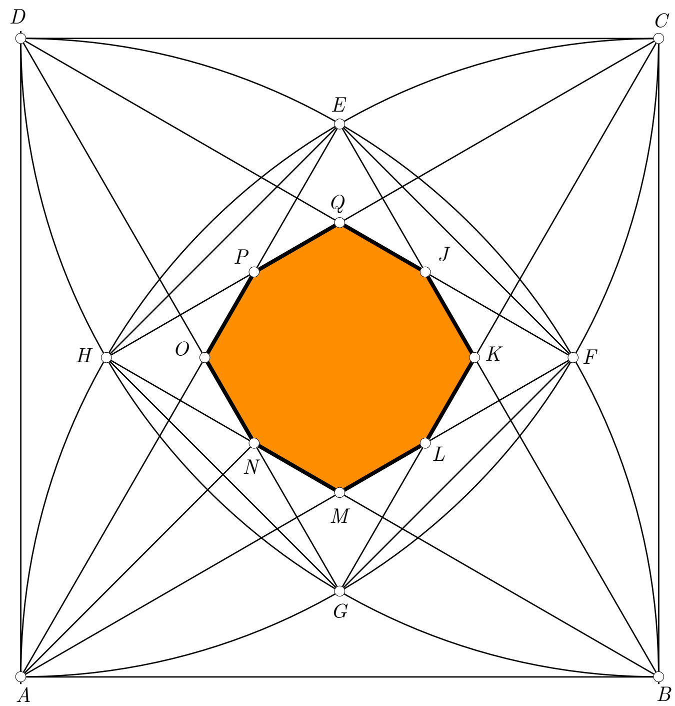
Problema 625

Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 2. Construyamos los cuatro cuadrantes de circunferencia interiores de centro en cada vértice y radio el lado del cuadrado. Se cortarán en cuatro puntos interiores, E, F, G, H. Construyamos los triángulos AFE, BEH, CHG y DGF. Estos cuatro triángulos dan lugar a un octógono común $JKLMNOPQ$, cuya área se pide.

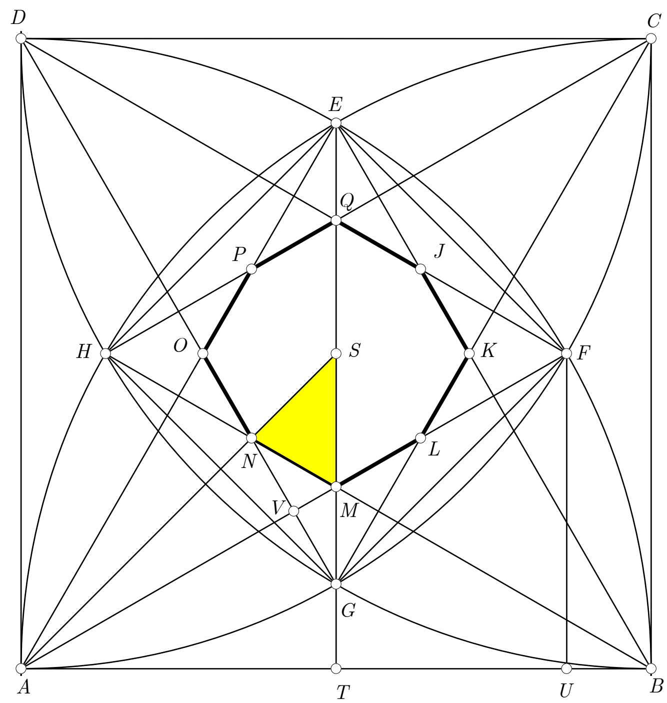


Propuesto por Ramón Trigueros Reina, profesor Doctor, Asociado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Soluzione di Ercole Suppa.

Sia S il centro del quadrato $ABCD$ e siano T, U le proiezioni ortogonali di E, F su AB. Dato che $\triangle AEB$ è un triangolo equilatero abbiamo che $ET = \sqrt{3}$. Poichè $FU = \frac{1}{2}AB$ ne segue che $\angle FAB = 30°$ e in modo analogo si prova che $\angle DAE = 30°$. Pertanto AF è la bisettrice di $\angle EAB$. Analogamente BH è la bisettrice di $\angle EBA$, per cui M è il baricentro del triangolo $\triangle AEB$ e quindi:

$$MT = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow SM = ST - MT = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{1}$$



Indicato con V il punto di intersezione tra AF e DG, dal triangolo rettangolo $\triangle AVN$ abbiamo:

$$AN = \frac{AV}{\cos 15°} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$SN = AS - AN = \sqrt{2} - (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-\sqrt{6} \qquad (2)$$

Da (1) e (2) discende che:

$$[SNM] = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot SN \cdot \sin 45° = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\frac{3-\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\sqrt{3}$$

$$[JKLMNOPQ] = 8 \cdot [SNM] = 12 - \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

□