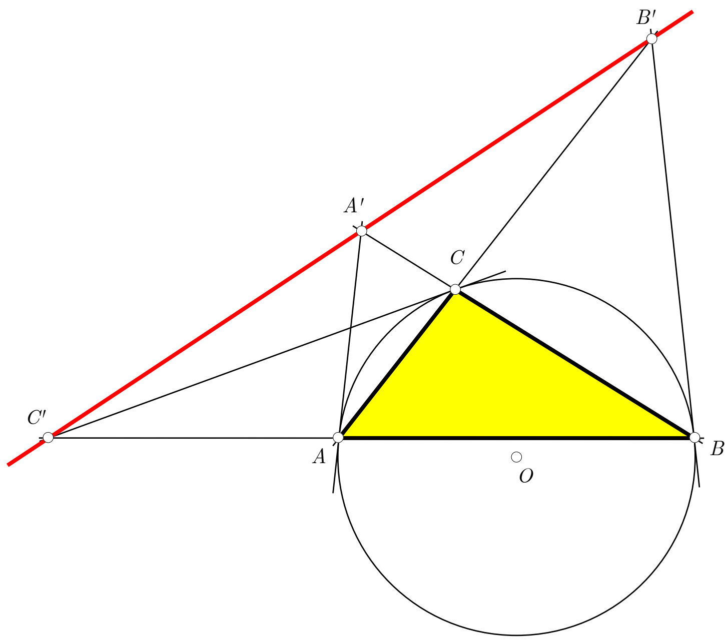
Problema 628. Recta de Pascal. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sean a, b y c las rectas BC, CA y AB. Sean t_a, t_b y t_c las rectas tangentes a la circunferencia circunscrita por A, B y C. Sean A', B' y C' las intersecciones de las rectas a, t_a; b, t_b y c, t_c. Demostrar que A', B' y C' están alineados.

Izquierdo, F. (2005): Fórmulas y propiedades geométricas.
Edición de autor. Imprime:CLM. Eduardo Marconi 3. Madrid (p. 39).

Soluzione di Ercole Suppa.



Usiamo le usuali notazioni della geometria del triangolo: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Dal teorema dei seni si ottiene facilmente che:

$$\frac{BA'}{A'C} = -\frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle BAA'}{\operatorname{sen} \angle CAA'} = -\frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} B} = -\frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = -\frac{c^2}{b^2} \tag{1}$$

In modo analogo si dimostrano le relazioni:

$$\frac{CB'}{B'A} = -\frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = -\frac{b^2}{a^2} \tag{2}$$

Da (1) e (2) abbiamo

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \left(-\frac{c^2}{b^2}\right)\left(-\frac{a^2}{c^2}\right)\left(-\frac{b^2}{a^2}\right) = -1$$

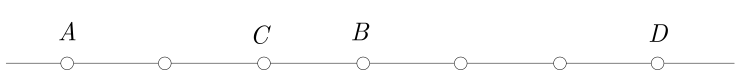
e quindi, per il teorema di Menelao, i punti A', B', C' sono allineati. $\square$

Osservazione. La retta passante per A', B', C' è la *polare trilineare* del *punto di Lemoine*: per dimostrare questa proprietà ricordiamo alcuni risultati di geometria del triangolo.

Definizione 1. *Se d una retta orientata e A, B, C, D sono quattro punti di d, la quaterna ordinata (A, B, C, D) è detta una **divisione** della retta d. Una divisione (A, B, C, D) è detta **armonica** se*

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

ossia se C e D dividono il segmento AB, internamente ed esternamente, nello stesso rapporto.

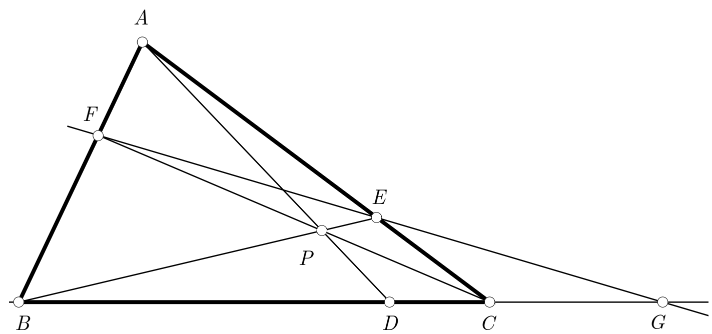


*Se (A, B, C, D) è una divisione armonica diciamo che i punti C e D **dividono armonicamente** il segmento AB e scriviamo:*

$$(A, B, C, D) = -1$$

*I punti C e D sono detti **coniugati armonici** rispetto ad A e B.*

Teorema 1. *Sia ABC un triangolo e sia P un punto non appartenente ai lati AB, BC, CA. Siano $D = AP \cap BC$, $E = BP \cap CA$, $F = CP \cap AB$, $G = BC \cap YZ$. La quaterna (B, C, D, G) è una divisione armonica della retta BC.*



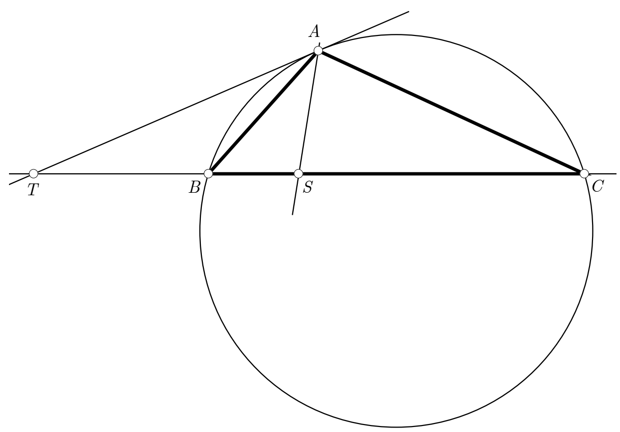
Proof. Applicando i teoremi di Ceva e Menelao abbiamo

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1, \qquad \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1$$

e quindi

$$\frac{BD}{DC} = -\frac{BG}{GC} \quad \Leftrightarrow \quad (B, C, D, G) = -1$$ □

Teorema 2. *Sia ABC un triangolo, sia γ la sua circonferenza circonscritta, sia S l'intersezione della simmediana uscente da A con BC e sia T intersezione della tangente a γ nel punto A con la retta BC. La quaterna (T, S, B, C) è una divisione armonica della retta BC.*



Proof. Dal teorema dei seni si ricava facilmente che

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle TAB}{\operatorname{sen} \angle TAC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{c^2}{b^2} \tag{1}$$

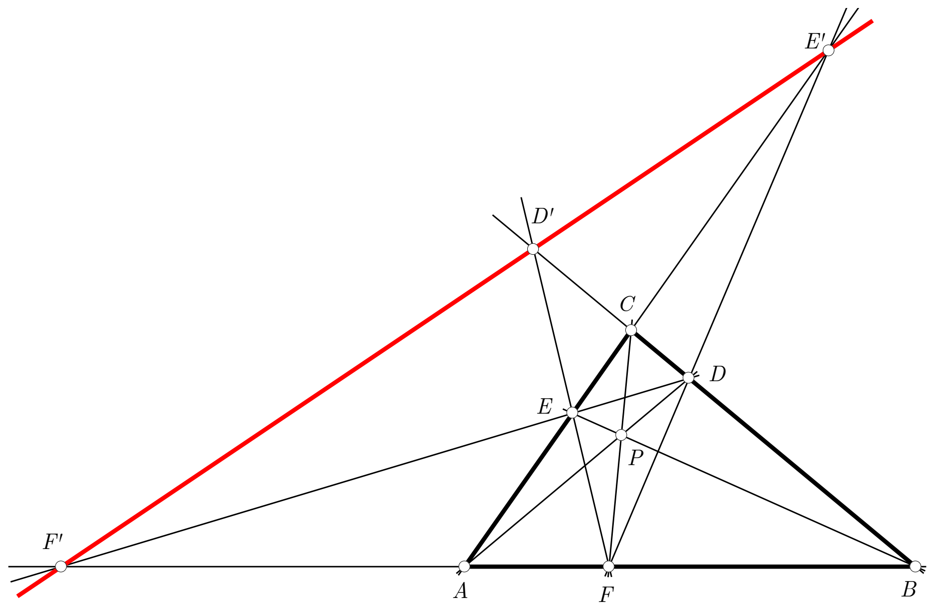
e, d'altra parte è noto che la simmediana soddisfa la relazione

$$\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2} \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) abbiamo

$$\frac{TB}{TC} = \frac{BS}{SC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{TB}{BS} = -\frac{TC}{CS} \quad \Leftrightarrow \quad (T, S, B, C) = -1$$ □

Teorema 3. *Sia dato un triangolo ABC ed un punto P non appartenente ai lati; siano $D = AP \cap BC$, $E = BP \cap CA$, $F = CP \cap AB$; sia D' l'armonico coniugato di D rispetto a $\{B, C\}$, sia E' l'armonico coniugato di E rispetto a $\{C, A\}$, sia F' l'armonico coniugato di F rispetto a $\{A, B\}$. I punti D', E', F' giacciono su una retta chiamata **polare trilineare**[1] del punto P rispetto al triangolo ABC.*



Proof. Dal teorema di Ceva abbiamo

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \tag{1}$$

Dalla definizione di definizione armonica abbiamo:

$$(B, C, D, D') = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = -\frac{BD'}{D'C} \tag{2}$$

$$(C, A, E, E') = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CE}{EA} = -\frac{CE'}{E'A} \tag{3}$$

$$(A, B, F, F') = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AF}{FB} = -\frac{AF'}{F'B} \tag{4}$$

Dalle (1),(2),(3),(4) segue che:

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = -1$$

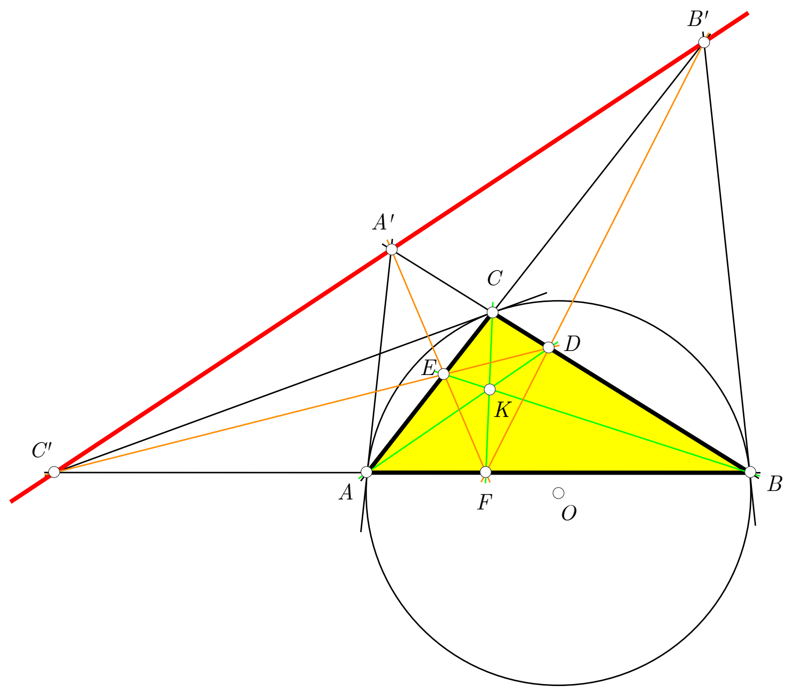
Pertanto, per il teorema di Menelao, i punti D', E', F' sono allineati. □

Possiamo ora dimostrare che la retta passante per i punti A', B', C' del problema 628 è la polare trilineare del punto di Lemoine.

[1] La definizione di *polare trilineare* di un punto P rispetto ad un triangolo ABC è stata data nel 1865 da J.J.A. Mathieu. La polare trilineare dell'ortocentro di un triangolo è chiamata *asse ortico*, mentre la polare trilineare del punto di Lemoine è chiamata *asse di Lemoine*.

Teorema 4. *Sia ABC un triangulo. Siano t_a, t_b e t_c le rette tangenti alla circonferenza circonscritta ad ABC. Siano $A' = t_a \cap BC$, $B' = t_b \cap CA$ e $C' = t_c \cap AB$ sia K il punto di Lemoine di ABC. La polare trilineare del punto K è la retta passante per A', B', C'.*

Proof. Siano D, E, F le intersezioni delle ceviane AK, BK, CK con le rette BC, CA, AB rispettivamente. Per il Teorema 2 i punti A', B', C' sono i coniugati armonici di D, E, F rispetto alle coppie $\{B, C\}$, $\{C, A\}$, $\{A, B\}$, rispettivamente. Pertanto, per il Teorema 3, i punti A', B', C' sono allineati e la retta che li contiene è la polare trilineare di K.



Dal Teorema 1 si ha che i punti delle terne $\{A', E, F\}$, $\{B', D, F\}$, $\{C', E, D\}$ sono allineati. $\square$