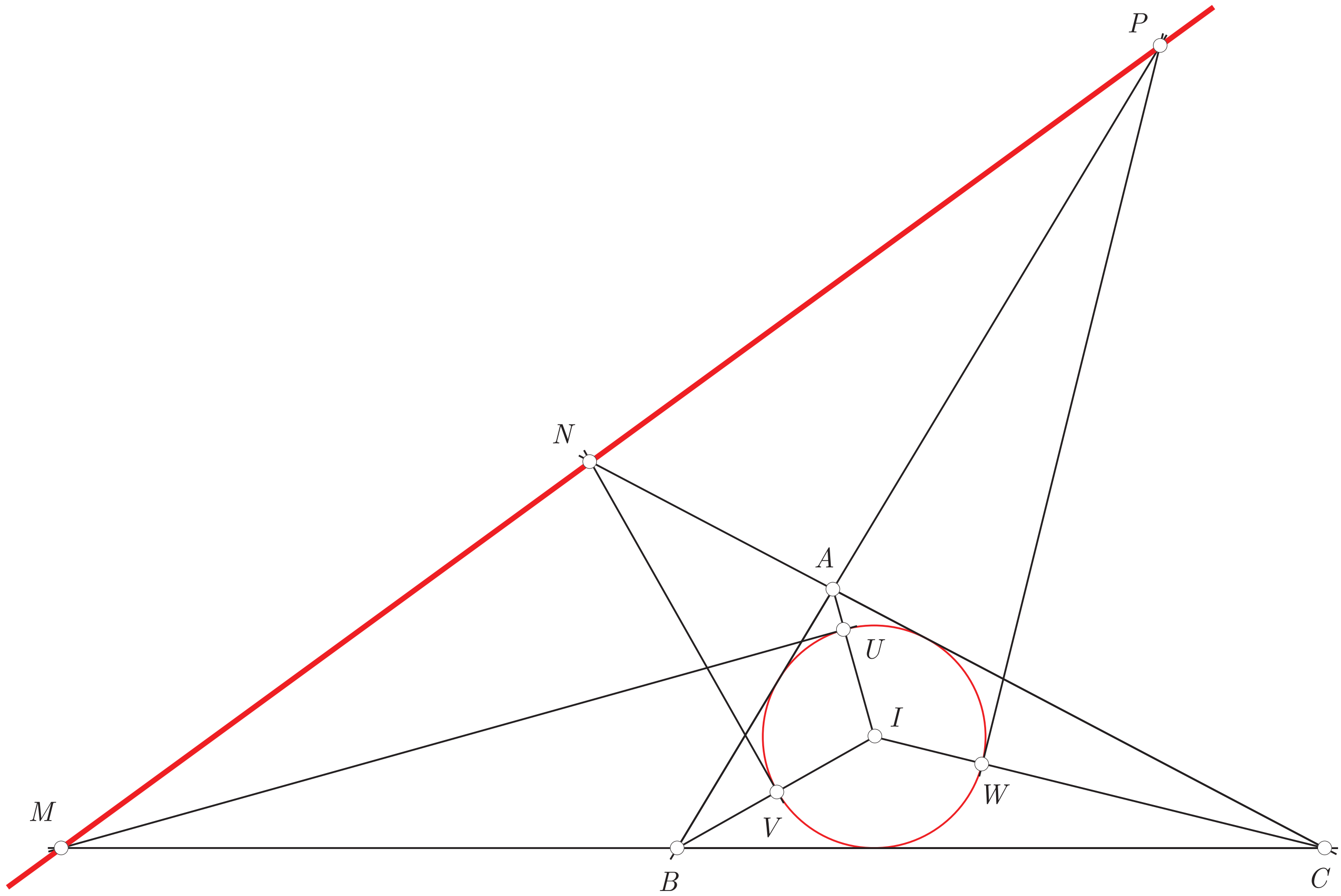
Problema 630. Sea ABC un triángulo. Sea I su incentro y Γ su circunferencia inscrita. Sean U, V y W los puntos de corte de IA, IB, IC con Γ, y sean t_a, t_b y t_c las tangentes a Γ por U, V y W. Sean r_a, r_b y r_c las rectas BC, CA y AB. Sean $M = r_a \cap t_a$, $N = r_b \cap t_b$, $P = r_c \cap t_c$. Demostrar que M, N y P están alineados.

Suppa, E. (2011): Comunicación personal.

Soluzione 1, Ercole Suppa.



Per risolvere il problema utilizziamo coordinate baricentriche omogenee rispetto al triangolo $\triangle ABC$. I calcoli sono svolti con il programma Mathematica mediante le routines contenute nel pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1].

Osservato che il punto U divide il segmento AI nel rapporto

$$\frac{AU}{UI} = \frac{AI - UI}{UI} = \frac{AI}{UI} - 1$$

determiniamo il rapporto $k = AU/UI$ nel modo seguente

$$\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\texttt{CuadradoDistancia[ptA, ptI]}}{\texttt{CuadradoDistanciaPuntoRecta[ptI, Recta[ptB, ptC]]}}} - \mathbf{1};$$

e quindi calcoliamo le coordinate di U mediante la routine `DividirRazon`:

[1] http://http://garciacapitan.99on.com/

```
ptU = DividirRazon[ptA, ptI, k, 1]
```

$$\left\{b+c+2\,a\,\sqrt{\frac{b\,c}{a^2-(b-c)^2}}\,,\ b\left(-1+2\,\sqrt{\frac{b\,c}{(a+b-c)\,(a-b+c)}}\right),\ c\left(-1+2\,\sqrt{\frac{b\,c}{(a+b-c)\,(a-b+c)}}\right)\right\}$$

Per calcolare le coordinate dei punti V, W possiamo usare la la routine `PermutarTerna`:

```
ptV = PermutarTerna[ptU];

ptW = PermutarTerna[ptV];
```

Calcoliamo ora le coordinate dei punti $M = BC \cap t_a$, $N = CA \cap t_b$, $P = AB \cap t_c$

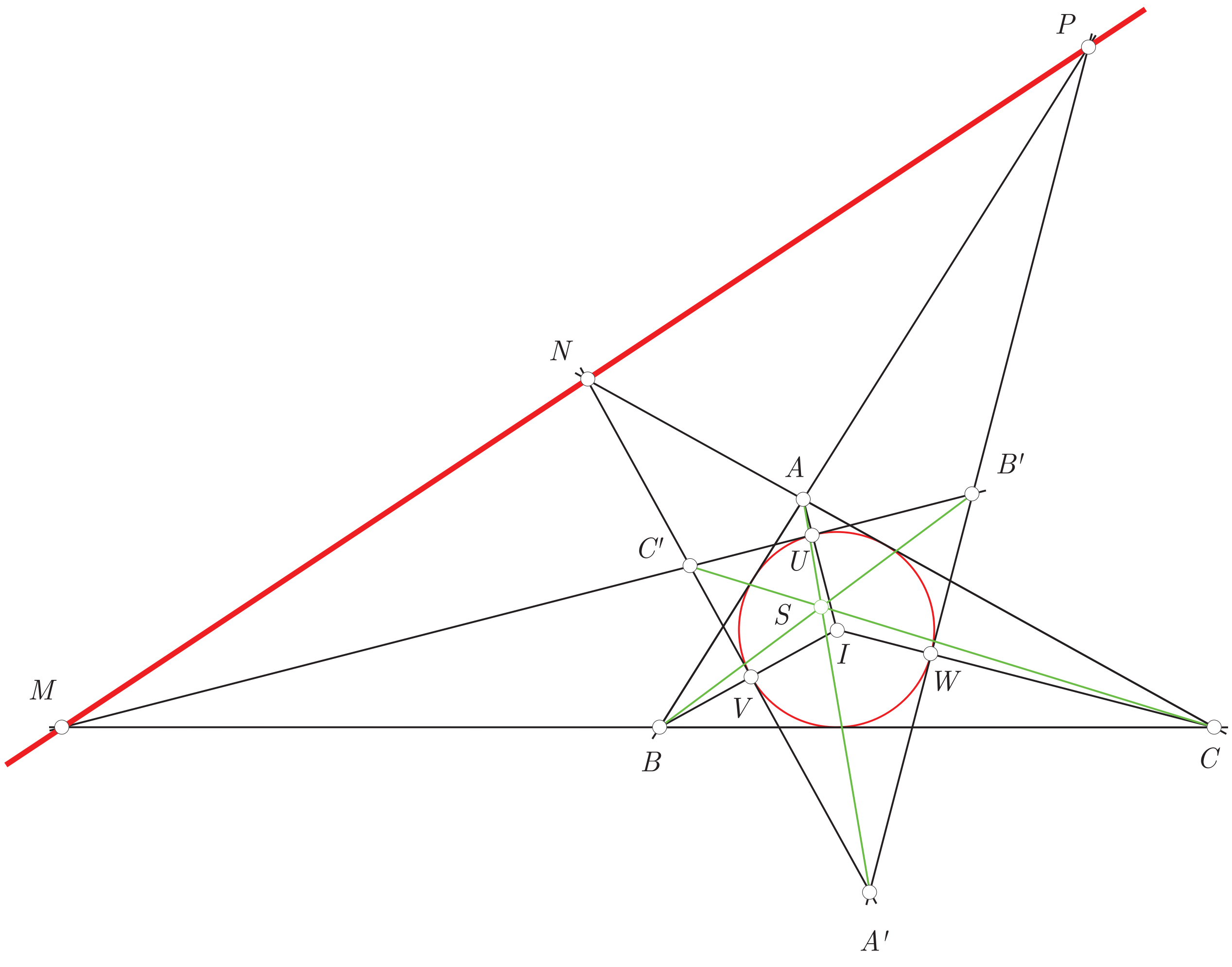
```
ptM = Punto[Recta[ptB, ptC], Perpendicular[ptU, Recta[ptA, ptI]]]

ptN = PermutarTerna[ptM];

ptP = PermutarTerna[ptN];
```

Verifichiamo che M, N, P sono allineati:

```
FullSimplify[Det[{ptM, ptN, ptP}]]
0
```

□

Osservazione 1. Nel problema precedente abbiamo dimostrato che il triangolo ABC ed il triangolo $A'B'C'$ formato dalle rette t_a, t_b, t_c sono prospettivi. Pertanto, per il teorema di Desargues, le rette AA', BB', CC' concorrono in un punto S (centro di prospettività).



Calcoliamo le ccordinate dei punti A', B', C':

```
ptA1 =
 Punto[Perpendicular[ptV, Recta[ptB, ptI]], Perpendicular[ptW, Recta[ptC, ptI]]]

ptB1 = PermutarTerna[ptA1];

ptC1 = PermutarTerna[ptB1];
```

Per trovare il punto $S = AA' \cap BB'$ usiamo la routine `PerspectorConABC`:

```
ptS = PerspectorConABC[{ptA1, ptB1, ptC1}];
```

Il numero di Kimberling del il punto S è dato da:

```
Kimberling[ptS]

0.9754276352
```

Mediante una semplice ricerca nell'enciclopedia di Kimberling [2] possiamo constatare che S coincide con il punto $X(177)$ = **first Mid-Arc point**.

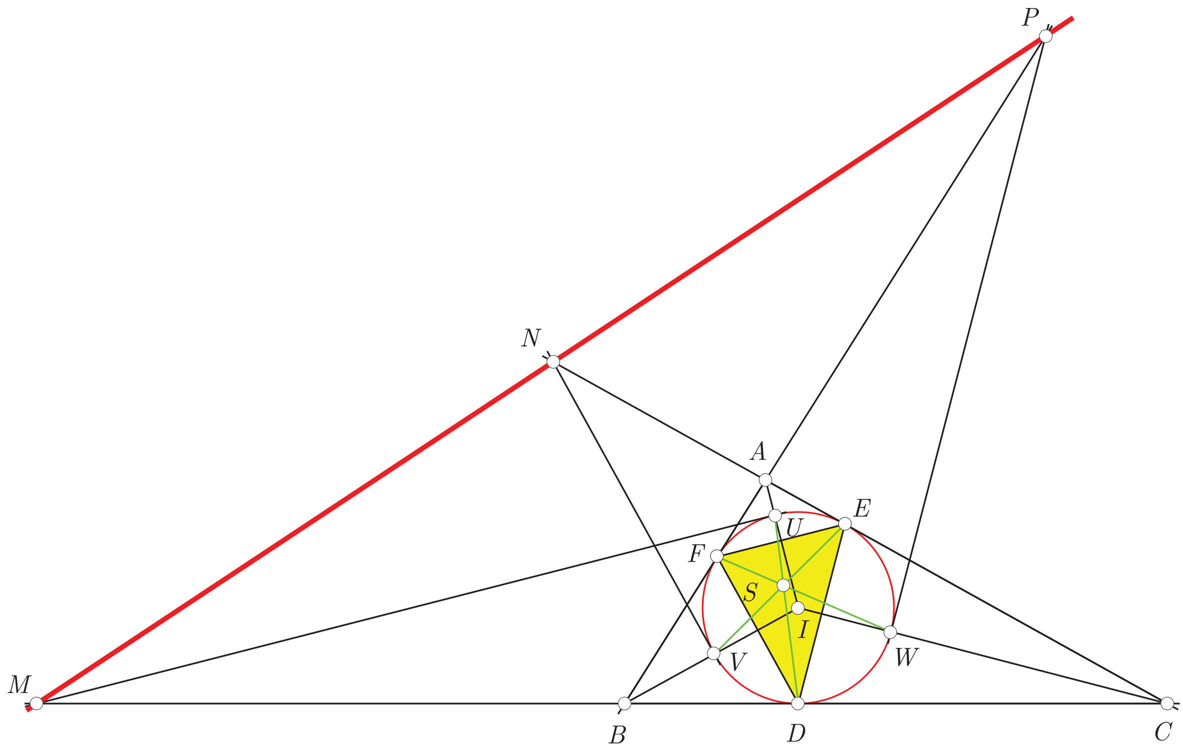
Index	Coordinate	Rank	Coordinate
174	1.175132454770	536	-11.7402298850
175	-7.15162777590	3438	-11.7101391061
176	1.190492903652	2919	-11.6668003556
177	0.975427635249	2669	-11.6314103722
178	2.359244703059	1868	-11.6221756174
179	1.257739557595	3165	-11.5243073215

□

[2] http:http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Osservazione 2. Dall'enciclopedia di Kimberling ho appreso che il problema 630 non è nuovo essendo già stato proposto da K. Kimberling[3].

Soluzione 2, G. R. Veldkamp.



Siano D, E, F i punti di contatto dell'incerchio con BC, CA, AB, rispettivamente. Allora è immediato constatare che le rette DU, EV, FW sono le bisettrici interne di $\triangle DEF$ (in quanto gli archi UF e UE sono congruenti, etc.) e, pertanto, concorrono nell'incentro S del triangolo DEF.

D'altra parte è chiaro che DU, EV, FW sono (rispettivamente) le polari di M, N, P rispetto all'incerchio (I). Allora, dal teorema di reciprocità, discende che M, N, P appartengono alla polare di S e, pertanto, sono allineati. $\square$

Soluzione 3, Jean-Louis Ayme[4].
Nelle pagine seguenti riportiamo una bella soluzione sintetica che mi è stata inviata il 15 ottobre 2012 dall'amico Jean-Louis Ayme, al qual esprimo il mio più sincero ringraziamento.

[3]Clark Kimberling and G. R. Veldkamp, Problem 1160 and Solution, Crux Mathematicorum 13 (1987) 298-299

[4]Jean-Louis Ayme, comunicazione personale. Sito WEB: http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/index.html

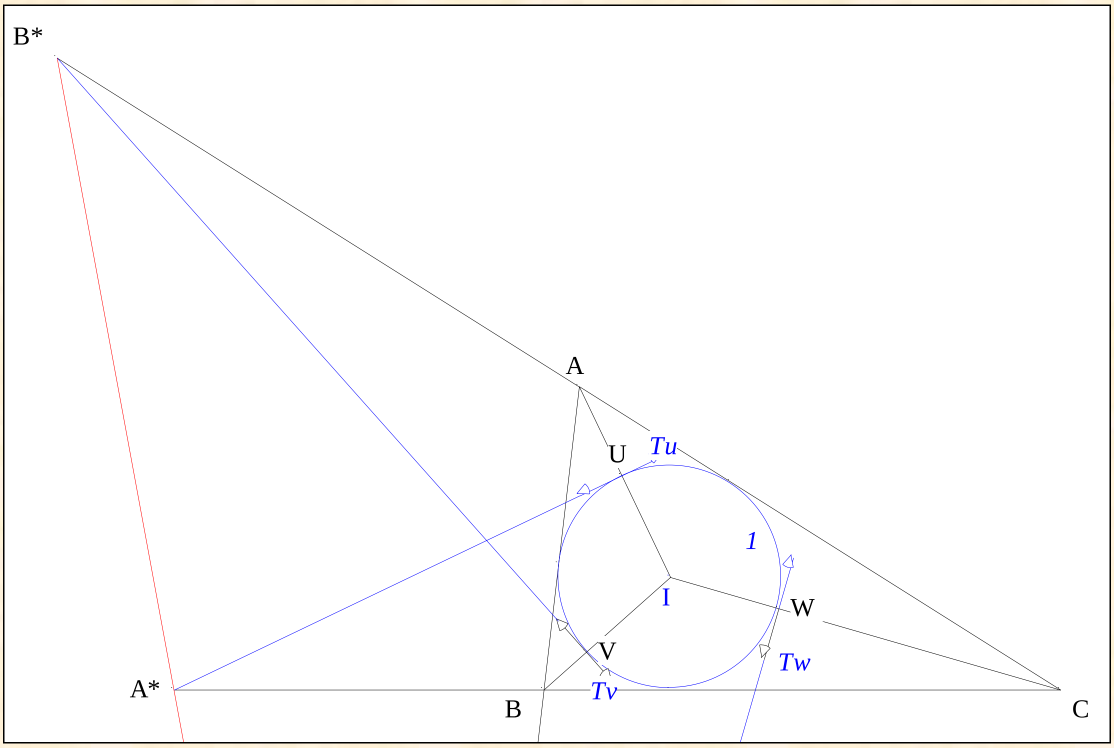
LE PROBLÈME 630

DU

PROFESSEUR ERCOLE SUPPA

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle ,
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	U, V, W	les points d'intersection resp. de *1* avec [AI], [BI], [CI],
	Tu, *Tv*, *Tw*	les tangentes à *1* resp. en U, V, W
et	A*, B*, C*	les points d'intersection resp. de *Tu* et (BC), *Tv* et (CA), *Tw* et (AB).

Donné : A*, B* et C* sont alignés.[1]

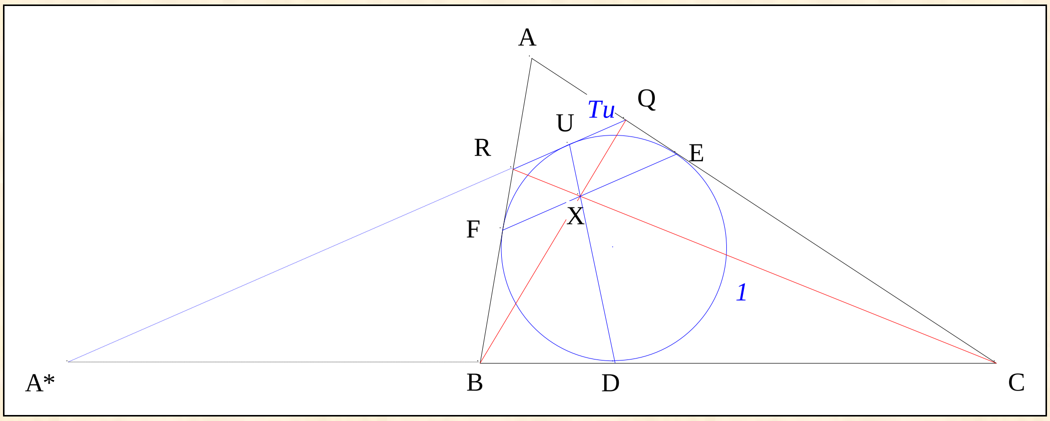
[1] Suppa E. (2011) communication personnelle ; http://www.esuppa.it/problemirisolti.html

VISUALISATION

DÉDICACÉE

AU

PROFESSEUR ERCOLE SUPPA

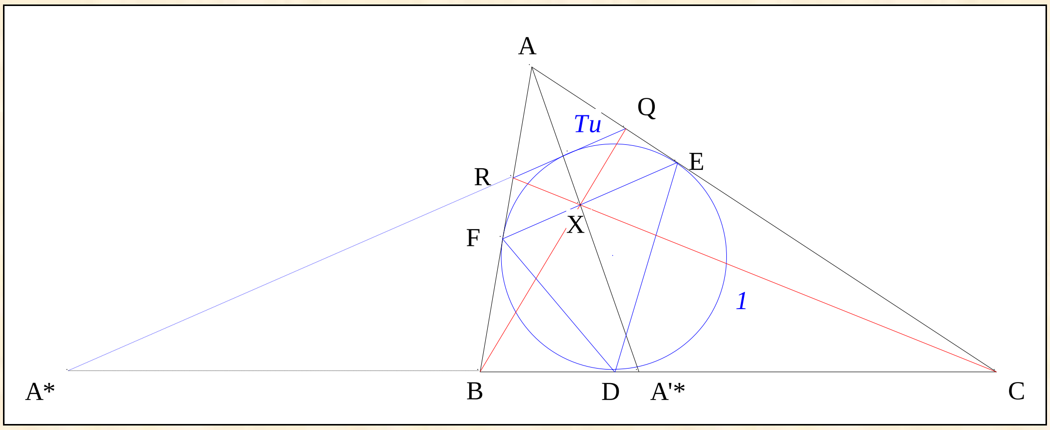


- Notons Q, R les points d'intersection de *Tu* resp. avec (AB), (AC).

- D'après "Le théorème de Newton"
  appliqué au quadrilatère circumscriptible BCQR, (BQ), (CR), (EF) et (DU) sont concourantes.

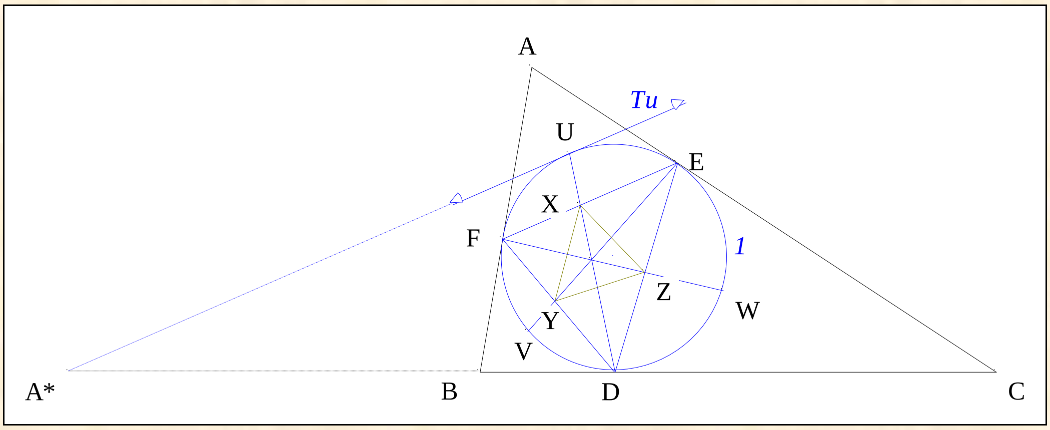
- Notons X ce point de concours.

- U étant le milieu de l'arc FUE de *1*, (DU) est la D-bissectrice intérieure de DEF.



- Notons A'* le point d'intersection de (AX) et (BC).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère"
  appliqué au quadrilatère complet ARXQ, le quaterne (B, C, A'*, A*) est harmonique.



- Notons Y, Z les point d'intersection resp. de (EV) et (FD), (FW) et (DE)
  et B'*, C'* les point d'intersection resp. de (BY) et (CA), (CZ) et (AB).

- **Scolies :** **(1)** (EV) est la E-bissectrice intérieure de DEF

  (2) (FW) est la F-bissectrice intérieure de DEF

  (3) (DU), (EV) et (FW) sont concourantes au centre de DEF.

- Nous avons,
  XYZ est inscrit dans DEF, DEF est inscrit dans ABC ;
  XYZ est en perspective avec DEF, DEF est en perspective avec ABC ;

  d'après "The cevian nests theorem" [2], XYZ est en perspective avec ABC ;

  en conséquence, (AXA'*), (BYB'*) et (CZC'*) sont concourantes.

- Le théorème de Ceva appliqué à ces trois droites concourantes
  et
  les conjugaisons présentent dans les trois quaternes harmoniques évoquée précédemment,
  conduisent à la réciproque du théorème de Ménélaüs en ce qui concerne A*, B* et C*.

- **Conclusion :** A*, B* et C* sont alignés.

[2] Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.