Problema 1. (Stage Senior 2008) Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con ortocentro H. La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.

Soluzione 1.

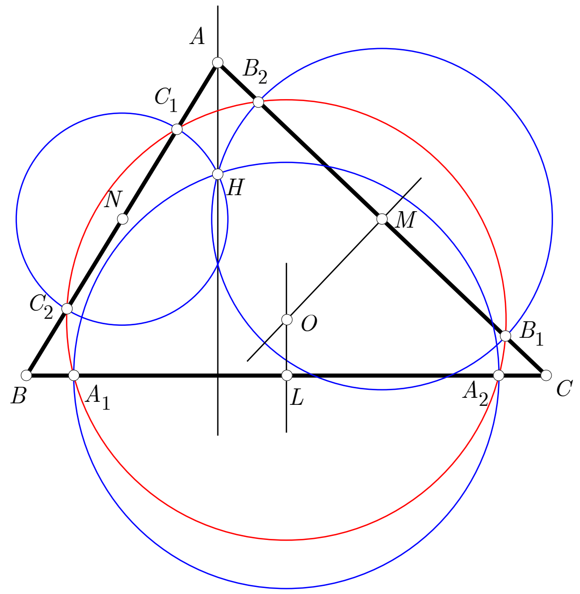

FIGURA 1

Indichiamo con L, M, N i punti medi di BC, CA, AB (FIGURA 4). Se i sei punti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 stanno su un cerchio, il centro di detto cerchio deve essere il circoncerchio O di $\triangle ABC$. Per dimostrare la conciclicità dei 6 punti basta verificare che hanno tutti la stessa distanza do O. Ovviamente $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$, dunque per concludere è sufficiente provare che $OA_1 = OB_1$, in quanto l'altra uguaglianza $OA_1 = OC_1$ si dimostra in modo analogo. Scegliendo O come origine dei vettori abbiamo

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \qquad , \qquad \overrightarrow{L} = \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{2}$$

Applicando il teoerma di Pitagora al triangolo rettangolo $\triangle OLA_1$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
OA_1^2 = OL^2 + LA_1^2 &= OL^2 + LH^2 = \\
&= \left\| \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} \right\|^2 + \left\| \vec{A}+\vec{B}+\vec{C} - \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} \right\|^2 = \\
&= \left\| \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{2\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{2} \right\|^2 =
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\left\|\vec{A}\right\|^2 + 2\left\|\vec{B}\right\|^2 + 2\left\|\vec{C}\right\|^2 + 4\left(\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{C}\cdot\vec{A}\right)}{4} =$$

$$= \frac{8R^2 + 4\left(\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{C}\cdot\vec{A}\right)}{4}$$

In modo analogo si trova che

$$OB_1^2 = \frac{8R^2 + 4\left(\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{C}\cdot\vec{A}\right)}{4}$$

e la dimostrazione è completa $\square$

Soluzione 2.

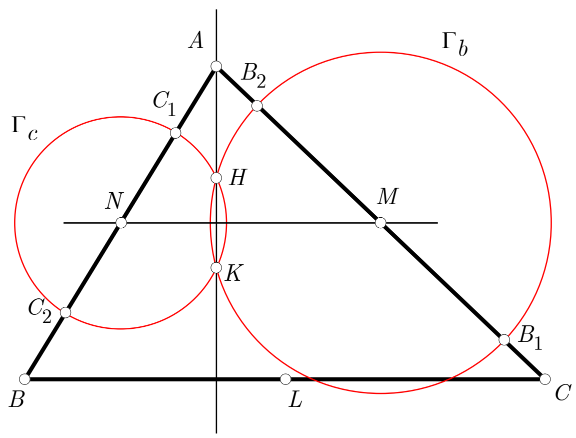

FIGURA 2

Siano nell'ordine Γ_b, Γ_c le circonferenze di centri M, N passanti per H. La retta AH è perpendicolare ad MN (essendo $AH \perp BC$) e quindi è l'asse radicale di Γ_b, Γ_c. Pertanto, detto K l'ulteriore punto di intersezione tra Γ_b, Γ_c abbiamo:

$$AB_1 \cdot AB_2 = \mathrm{Pow}_{\Gamma_b}(A) = AH \cdot AK = \mathrm{Pow}_{\Gamma_c}(A) = AC_1 \cdot AC_2$$

e questo dimostra che B_1, B_2, C_1, C_2 sono conciclici.

Analogamente si dimostra che A_1, A_2, B_1, B_2 sono conciclici e la dimostrazione è completa. $\square$