Problema 2. **(Stage Senior 2008)** Dato un quadrilatero $ABCD$ ed un punto M del suo piano dimostrare che i simmetrici di M rispetto ai punti medi dei lati sono vertici di un parallelogramma.

Soluzione.

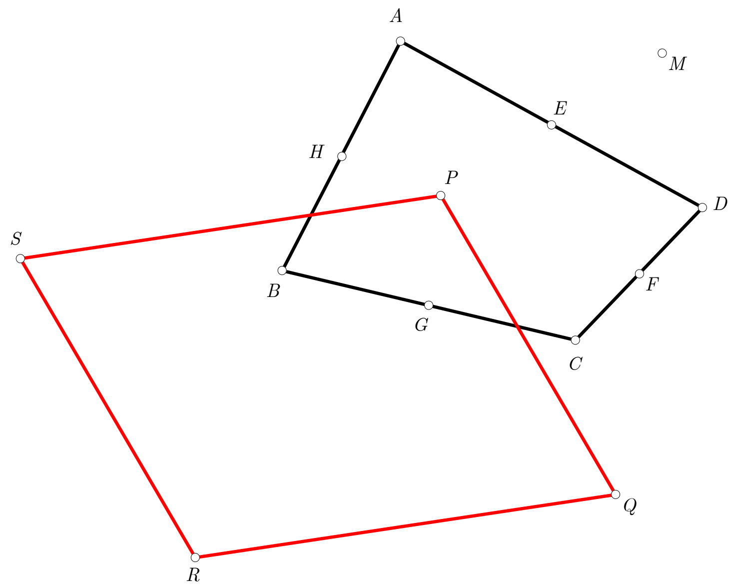

FIGURA 1

Siano E, F, G, H i punti medi di AB, BC, CD, DA rispettivamente e siano P, Q, R, S i simmetrici di M rispetto a E, F, G, H (FIGURA 6). Abbiamo:

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{M} + 2 \cdot \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{M} + 2\left(\frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}}{2} - \overrightarrow{M}\right) = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{M}$$

ed in modo analogo si trova che

$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{M}$$

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} - \overrightarrow{M}$$
$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{A} - \overrightarrow{M}$$

Pertanto

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}$$

Essendo $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$, il quadrilatero $PQRS$ è un parallelogrammo, avendo i lati opposti PQ ed RS uguali e paralleli. $\square$