

**Problema 4.** Siano  $ABFG$ ,  $ACDE$  i quadrati costruiti esternamente ai lati  $AB$ ,  $AC$  del triangolo  $\triangle ABC$ . Dimostrare che  $EB \perp CG$ .

**Soluzione.**

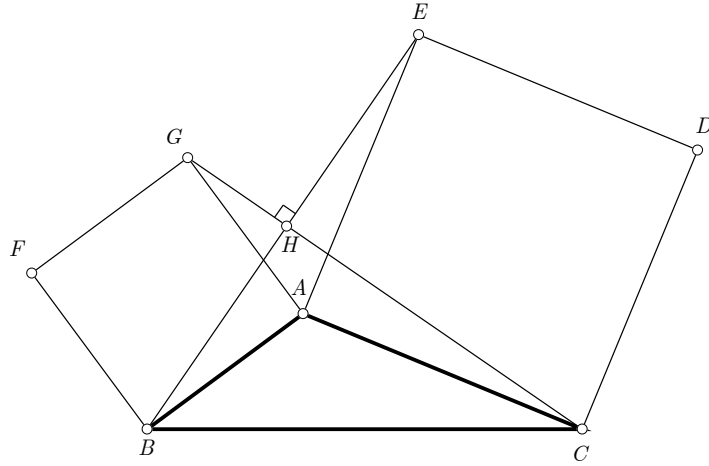


FIGURA 1

Detto  $H = BE \cap CG$  abbiamo

$$EB \perp CG \Leftrightarrow \cos(\angle GHE) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

D'altra parte, essendo

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA} = 0$$

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\pi - \angle GAE) = -\cos(\angle GAE)$$

risulta che

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{GC} &= (\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC}) = \\ &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\ &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\ &= EA \cdot GA \cdot \cos(\angle EAG) + AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC) = \\ &= \cos(\angle BAC)(AC \cdot AB - AB \cdot AC) = 0 \end{aligned}$$

e questo prova che  $EB \perp CG$ . □