Problema 167. Sea ABC un triangulo, de lados $a \geq b \geq c$. Si r es el radio del circulo inscrito, y a m_a la mediana correspondiente al lado BC, demostrar que

$$2\,(m_a + r) \geq b + c \qquad \Leftrightarrow \qquad A \leq 90^\circ$$

y la equivalencia analoga cambiando los signos menor o igual que por mayor o igual que.

Propuesto por Juan Bosco Romero Marquez, Avila, Espana.

Solución de Ercole Suppa, Teramo, Italia.

Utilizando las fórmulas conocidas:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad , \quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

podemos escribir la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
2\,(m_a + r) \geq b + c & \qquad \Longleftrightarrow \\
2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} + \frac{\Delta}{s}\right) \geq b + c & \qquad \Longleftrightarrow \\
\left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} + 2\frac{\Delta}{s}\right)^2 \geq (b+c)^2 & \qquad \Longleftrightarrow \\
2b^2+2c^2-a^2+4\frac{\Delta^2}{s^2} + 4\frac{\Delta}{s}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq b^2+c^2+2bc & \qquad \Longleftrightarrow \\
(b-c)^2-a^2+4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + 4\frac{\Delta}{s}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
s\left[(b-c)^2-a^2\right] + 4(s-a)(s-b)(s-c) + 4\Delta\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
4\Delta\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq a(a+b-c)(a-b+c) & \qquad \Longleftrightarrow \\
4\Delta\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq 4a(s-c)(s-b) & \qquad \Longleftrightarrow \\
s(s-a)(s-b)(s-c)\left(2b^2+2c^2-a^2\right) \geq a^2(s-c)^2(s-b)^2 & \qquad \Longleftrightarrow \\
s(s-a)\left(2b^2+2c^2-a^2\right) \geq a^2(s-c)(s-b) & \qquad \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{2}(b+c)^2(b^2+c^2-a^2) \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
bc(b+c)^2\cos A \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
A \leq 90^\circ & \qquad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

La otra equivalencia

$$2\,(m_a + r) \leq b + c \qquad \Leftrightarrow \qquad A \geq 90^\circ$$

se muestra exactamente de la misma manera. $\square$