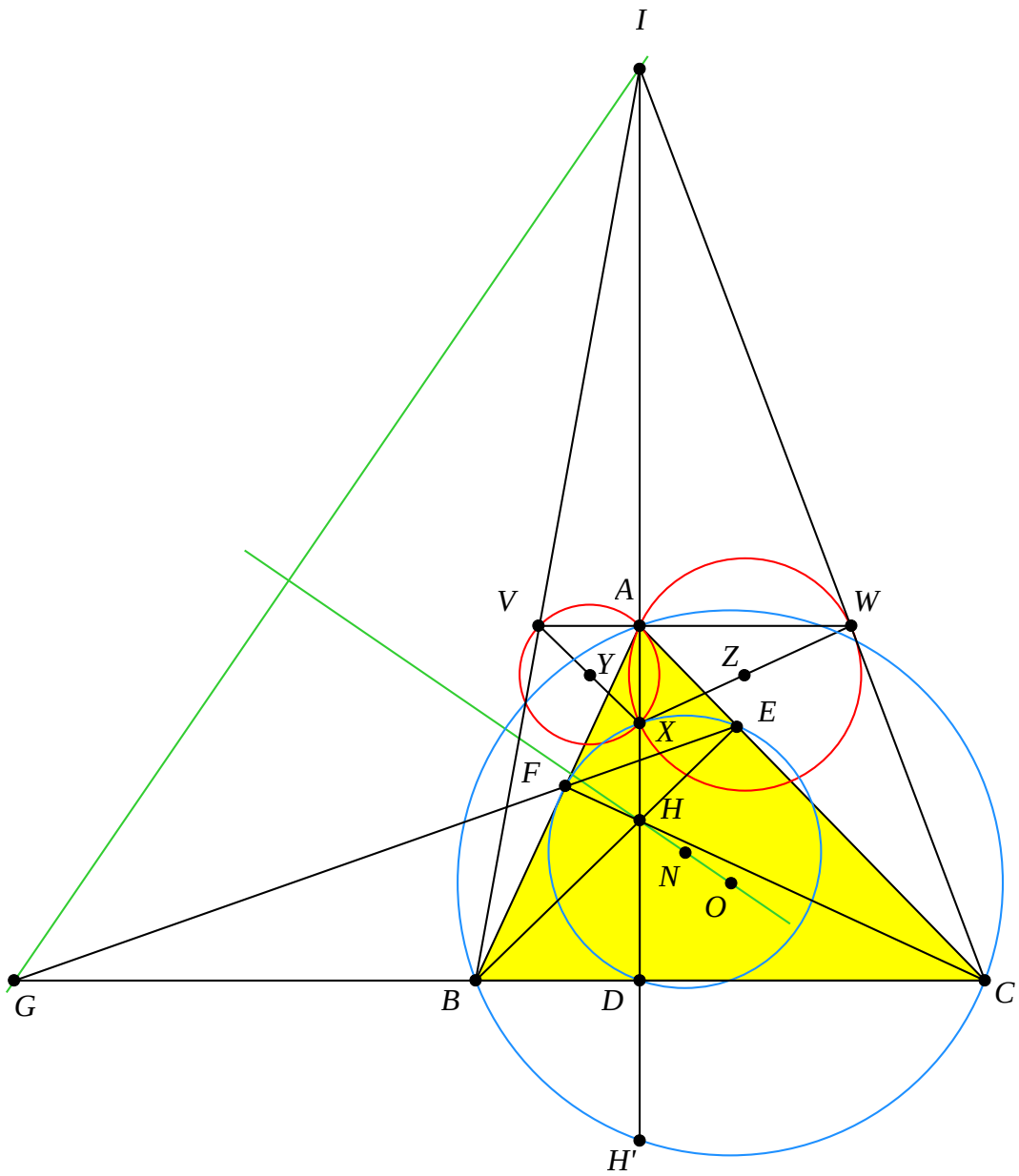
Problem 291. *ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. El punto medio de AH es X. Sean E y F los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. XV es un diámetro de una circunferencia que pasa por A y X, y es tangente a la recta AC. Una segunda circunferencia que pasa por A y X y es tangente a la recta AB, tiene a XW como diámetro. Suponiendo que se pueden construir los puntos $G = EF \cap BC$, $I = BV \cap CW$, demostrar que las rectas GI y OH son perpendiculares.*

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España

Solutione. Sia D il piede dell'altezza condotta da A su BC, sia H' il punto di intersezione (diverso da A) della retta AH con il circocerchio (O) e sia N il punto medio di OH, come indicato in figura.



Useremo le seguenti ben note proprietà:

- N è il centro della circonferenza dei nove punti che passa per D, E, F;
- il punto H' è il simmetrico di H rispetto a BC

Per dimostrare la tesi è sufficiente provare che GI è l'asse radicale di (O) ed (N): infatti da ciò segue che $GI \perp ON$ e quindi, dato che O, N, H sono allineati, $GI \perp OH$.

Claim 1. Il punto G ha la stessa potenza rispetto ad (O) ed (N).

Infatti dal quadrilatero ciclico $BCEF$ abbiamo:

$$GB \cdot GC = GF \cdot GE$$

Claim 2. Il punto I ha la stessa potenza rispetto ad (O) ed (N).

Posto $\angle ABC = \beta$ e $\angle ACB = \gamma$ abbiamo $\angle BHC = \angle BHD + \angle DHC = \gamma + \beta$. Indicati rispettivamente con Y e Z i centri delle circonferenze $\odot(AXV)$ e $\odot(AXW)$, tenuto conto che AC è tangente ad (Y) ed AB è tangente a Z, abbiamo:

$$\angle XVW = \angle XVA = \angle XAC = 90^\circ - \gamma = \angle HBC \tag{1}$$
$$\angle XWV = \angle XWA = \angle XAB = 90^\circ - \beta = \angle HCB \tag{2}$$
$$\angle VXW = 180^\circ - \angle XVA - \angle XWA = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta + \gamma = \angle BHC \tag{3}$$

Da (1), (2), (3) segue che $\triangle XVW \sim \triangle HBC$.

Tenuto conto che $VW \parallel BC$ e $\triangle XVW \sim \triangle HBC$, abbiamo:

$$\frac{AX}{HD} = \frac{VA}{BD} = \frac{IA}{ID} \quad \Rightarrow$$
$$AX \cdot ID = IA \cdot HD = IA \cdot DH' \quad \Rightarrow$$
$$AX \cdot ID + IA \cdot ID = IA \cdot DH' + IA \cdot ID \quad \Rightarrow$$
$$ID \cdot (IA + AX) = IA \cdot (ID + DH') \quad \Rightarrow$$
$$IX \cdot ID = IA \cdot IH'$$

per cui il punto I ha la stessa potenza rispetto ad (N) ed (O).

Dato che G ed I hanno la stessa potenza rispetto ad ad (N) ed (O) ne segue che IG è l'asse radicale di (N) ed (O) e la dimostrazione è completa. $\square$