Problema 138. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea Γ una circunferencia de centro O inscriptible en un cuadrilátero $ABCD$. Sean M y N los incentros de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$. Si la recta que une M y N corta a la diagonal AC del cuadrilátero $ABCD$ en el punto K, probar que las rectas BN, DM y KO son concurrentes.

Solución enviada por Ercole Suppa, Teramo, Italy

Para resolver el problema utilizaremos el siguiente

Lema. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Si los círculos (I) y (J), inscritos en los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ son tangentes a la diagonal AC en los puntos B' y D', entonces se verifica la igualdad

$$B'D' = \frac{|BC + DA - AB - DC|}{2}$$

Demostración del Lema.

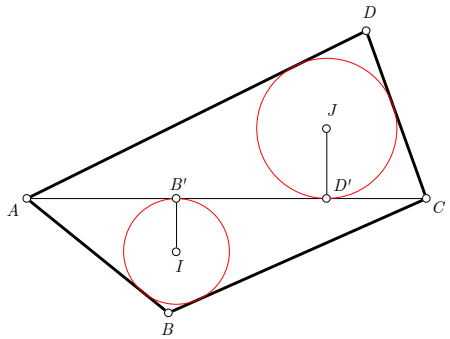

Figura 1

Teniendo en cuenta las conocidas fórmulas:

$$AD' = \frac{AC + AD - CD}{2} \qquad , \qquad AB' = \frac{AC + AB - BC}{2}$$

tenemos que

$$B'D' = |AD' - AB'| = \frac{|BC + DA - AB - DC|}{2}$$

como queríamos demostrar. $\square$

Corolario. Si el cuadrilátero $ABCD$ es circunscriptible, entonces los círculos (I) y (J) inscritos en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$, son tangentes a la diagonal AC en el mismo punto. $\square$

Ahora, para resolver el problema propuesto observamos que, por ser $ABCD$ circunscriptible, los círculos (M) y (N), inscritos en $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son tangentes a la diagonal AC en el punto K y entonces $MN \perp AC$ (véase la figura 2).

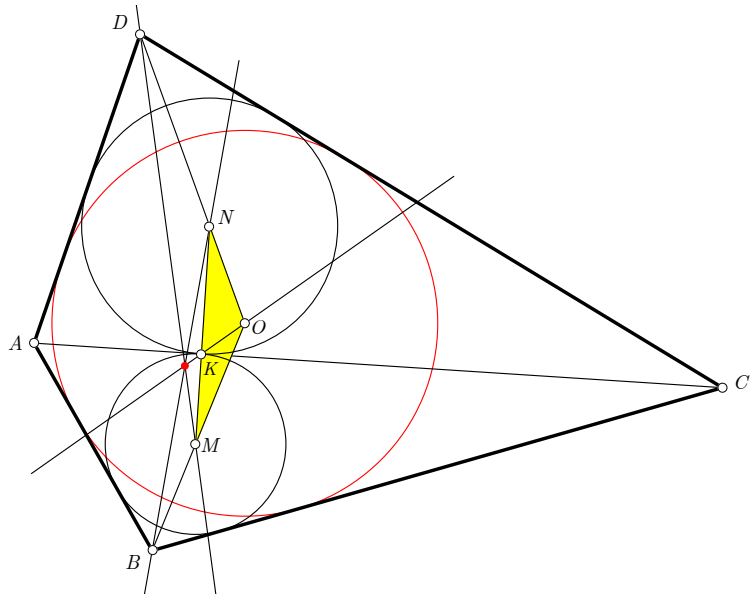

Figura 2

Denotamos, respectivamente, por R, r_1, r_2 el radio de la circunferencia (O) inscrita en $ABCD$ y los radios de las circunferencias (M), (N).

La homotecia de centro B y razón $\frac{r_1}{R}$ transforma (O) en (M) y los segmentos BM, BO verifican

$$\frac{BM}{BO} = \frac{r_1}{R} \tag{1}$$

De igual forma, la homotecia de centro D y razón $\frac{r_2}{R}$ transforma (O) en (N) y los segmentos DN, DO verifican

$$\frac{DN}{DO} = \frac{r_2}{R} \tag{2}$$

Por ser $MK = r_1$ y $NK = r_2$, teniendo en cuenta (1), (2) llegamos a

$$\frac{MB}{BO} \cdot \frac{OD}{DN} \cdot \frac{NK}{KM} = \frac{r_1}{R} \cdot \frac{R}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = 1$$

y en consecuencia, por el recíproco del teorema de Ceva aplicado al triángulo $\triangle MON$, las rectas BN, DM y KO son concurrentes, con lo que hemos terminado. $\square$