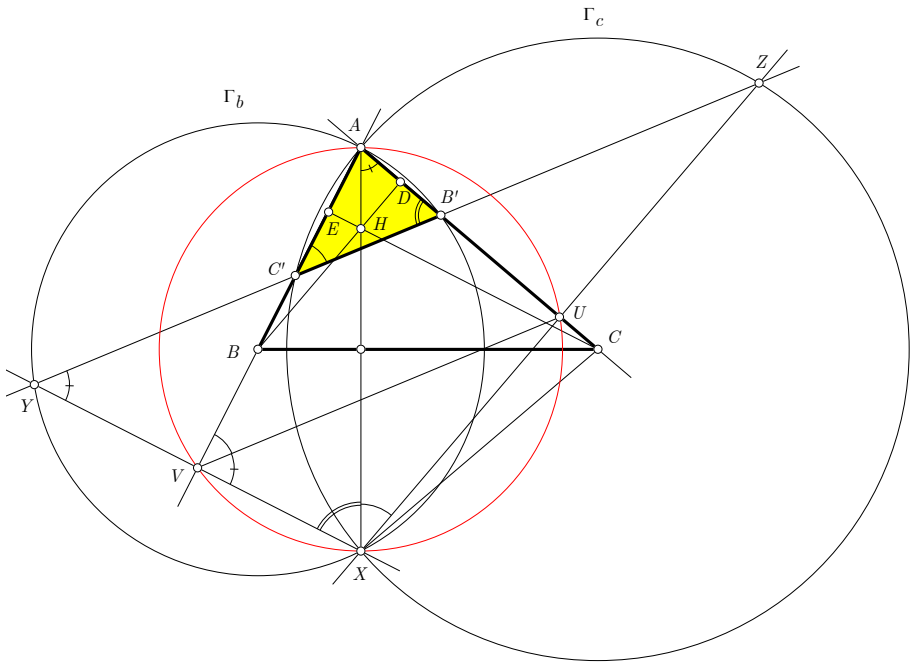
Problema 140. *Propuesto por Francisco Javier García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego, Córdoba, y Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Dado un triángulo $\triangle ABC$, supongamos que la circunferencia Γ_b, con centro B y radio BA, corta en B' al lado AC, y que la circunferencia Γ_c, de centro C y radio CA, corta en C' al lado AB. Las circunferencias Γ_b y Γ_c, que se cortan en A y en un cierto punto X, vuelven a cortar al segmento $B'C'$ en los puntos Y y Z, respectivamente. Probar que XY es perpendicular a AB y que XZ es perpendicular a AC.

Solucíon enviada por Ercole Suppa, Teramo, Italy

Sean respectivamente D y E las proyecciones ortogonales de B sobre AC y de C sobre AB, como aparecen en la figura siguiente.



Por ser $BA = BB'$ y $CA = CC'$ es claro que

$$AB' = 2 \cdot AB \cdot \cos A, \quad AC' = 2 \cdot AC \cdot \cos A \quad \Rightarrow$$

$$AB' : AC' = AB : CA$$

Por tanto los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ son similares, entonces

$$\angle AC'B' = \angle ACB, \qquad \angle AB'C' = \angle ABC \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales, tenemos que

$$\angle YXA = \angle YAB', \qquad \angle AXZ = \angle AC'Z \tag{2}$$

Si denotamos $U = XZ \cap AC$ y $V = XY \cap AB$, usando (1) y (2) llegamos a

$$\begin{aligned}\angle VXU &= \angle VXA + \angle AXU = \angle YXA + \angle AXZ = \\ &= \angle YAB' + \angle AC'Z = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle VAU\end{aligned}$$

Resulta así que el cuadrilátero $AVXU$ es inscriptible, por tanto

$$\angle AVU = \angle AXU = \angle AC'B' = \angle ACB \tag{3}$$

$$\angle XVU = \angle XAU = 90^\circ - \angle ACB \tag{4}$$

Agregando (3) y (4) obtenemos $\angle AVX = 90^\circ$, es decir $XY \perp AB$.

Por ser $AVXU$ cíclico, también tenemos que $\angle AUX = 90^\circ$ y esto concluye la demostración. $\square$