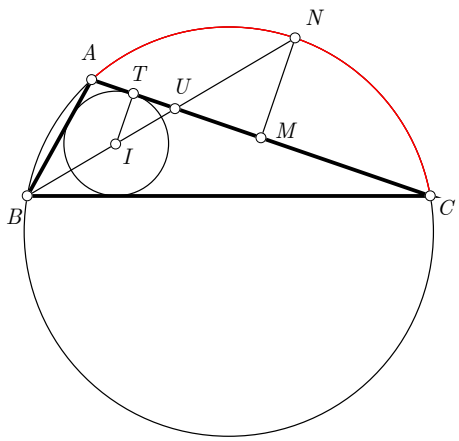
**Problema 144.** *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón*

En un triángulo $\triangle ABC$, sean $M$ el punto medio del lado $AC$, $N$ el punto medio del arco $AC$ de la circunferencia circunscrita que no contiene al vértice $B$, $I$ el incentro, y $T$ el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado $AC$. Se denotan por $a$, $b$ y $c$ las longitudes de los lados del modo usual, y por $r$ el radio de la circunferencia inscrita. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $a+c = 2b$, (b) $AT{\cdot}TC = 3r^2$, (c) $MN = r$, (d) $IA{\cdot}IC = 2r{\cdot}IB$

*Solución enviada por Ercole Suppa, Teramo, Italy*

Sea $U = BI \cap AC$ y observamos que los puntos $B$, $I$, $U$, $N$ están alineados, siendo $BI$ la bisectriz del ángulo $\angle ABC$.




En la resolución del problema vamos a utilizar las conocidas relaciónes $AT = s - a$, $TC = s - c$ y

$$IA = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}, \qquad IB = \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}}, \qquad IC = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} \tag{1}$$

$$r = \frac{\Delta}{s} \qquad , \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2}$$

donde $s$ y $\Delta$ indican respectivamente el semiperímetro y el area de $\triangle ABC$.

También usaremos la siguiente fórmula que hará los cálculos más sencillos:

$$MN = r \cdot \frac{b}{2(s-b)} \tag{3}$$

La identidad (3) puede demostrarse observando que los triángulos $\triangle ITU$ y $\triangle NMU$ son semejantes, así que tenemos

$$\frac{MN}{TI} = \frac{UM}{TU} \qquad \Rightarrow \qquad MN = TI \cdot \frac{UM}{TU} \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que

$$AU = \frac{bc}{a+c} \qquad , \qquad UC = \frac{ab}{a+c}$$

y haciendo un poco de manipulación algebraica podemos expresar $UM$ y $TU$ en función de $a$, $b$, $c$ :

$$UM = |UC - MC| = \left| \frac{ab}{a+c} - \frac{b}{2} \right| = \frac{b|a-c|}{2(a+c)} \tag{5}$$

$$TU = |CT - UC| = \left| (s-c) - \frac{ab}{a+c} \right| = \frac{|a-c|}{a+c}(s-b) \tag{6}$$

Sustituendo (5) y (6) en (4) obtenemos la fórmula (3).

Ahora, finalmente, podemos demostrar la equivalencia de las condiciones que apparecen en el enunciado.

**(a) $\Rightarrow$ (b):** Si $a + c = 2b$, obtenemos

$$a + b + c = 3b \qquad \Rightarrow \qquad 2s = 3b \qquad \Rightarrow \qquad s = 3(s-b)$$

entonces, usando las fórmulas (2), es :

$$AT \cdot TC = (s-a)(s-c) = 3 \cdot \frac{\Delta}{3(s-b)} \cdot \frac{\Delta}{s} = 3 \cdot \frac{\Delta^2}{s^2} = 3r^2$$

**(b) $\Rightarrow$ (c):** Si $AT \cdot TC = 3r^2$, tenemos

$$(s-a)(s-c) = 3\frac{\Delta^2}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad s = 3(s-b) \qquad \Rightarrow \qquad 2(s-b) = b$$

Entonces, usando la fórmula (3), es :

$$MN = r \cdot \frac{b}{2(s-b)} = r \cdot \frac{b}{b} = r$$

**(c) $\Rightarrow$ (d):** Si $MN = r$, usando la fórmula (3), tenemos $b = 2(s-b)$. Entonces, teniendo en cuenta las fórmulas (2), llegamos a :

$$\begin{aligned} IA \cdot IC &= \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}} \cdot \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} = \\ &= 2(s-b)\sqrt{\frac{c(s-a)}{s}} \cdot \sqrt{\frac{a(s-c)}{s}} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \cdot \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}} = \\ &= 2r \cdot IB \end{aligned}$$

**(d) $\Rightarrow$ (a):** Si $IA \cdot IC = 2r \cdot IB$, tenemos

$$\sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}} \cdot \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \cdot \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$b = 2(s-b) \qquad \Leftrightarrow \qquad a + c = 2b$$

La demostración ha terminado. $\square$