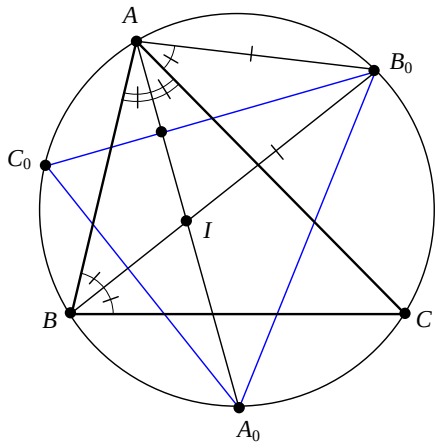
Problema 497. Sea ABC un triángulo y G su circunferencia circunscrita. Sean C_0 el punto medio del arco AB, B_0 el punto medio del arco CA y A_0 el punto medio del arco BC. Demuestra que el incentro del triángulo ABC es el ortocentro del $A_0B_0C_0$.

XI Olimpiada de Yucatán. 1997

Soluzione sintetica, *Ercole Suppa.*



Le rette AA_0, BB_0, CC_0 passano per l'incentro I del triangolo ABC poichè ad angoli alla circonferenza uguali corrispondono archi uguali. Pertanto per dimostrare che I è l'ortocentro di $\triangle A_0B_0C_0$ è sufficiente provare che A_oI, B_0I, C_0I sono le altezze di $\triangle A_0B_0C_0$.

Dall'uguaglianza degli archi AB_0 e B_0C discende che:

$$\angle CBB_0 = \angle CAB_0 \tag{1}$$

Poichè I è l'incentro di $\triangle ABC$ abbiamo:

$$\angle CAI = \angle IAB \quad , \quad \angle CBI = \angle IBA \tag{2}$$

Dal teorema dell'angolo esterno, tenuto conto di (1) e (2), abbiamo:

$$\begin{aligned}\angle B_0IA &= \angle IBA + \angle IAB = \angle CBI + \angle CAI = \\ &= \angle CBB_0 + \angle CAI = \angle CAB_0 + \angle CAI = \\ &= \angle IAB_0\end{aligned}$$

Pertanto $AB_0 = IB_0$ e questo implica che B_0 appartiene all'asse di AI. In modo analogo, si dimostra che anche C_0 appartiene all'asse di AI. Allora B_0C_0 è l'asse di AI e, di conseguenza, $AI \perp B_0C_0$, ossia AI è l'altezza di $\triangle A_0B_0C_0$ relativa al lato B_0C_0. Similmente si dimostra che BI e CI sono altezze di $\triangle A_0B_0C_0$ e, pertanto, I è l'ortocentro di $\triangle A_0B_0C_0$. $\square$

Soluzione analitica, *Ercole Suppa*.

Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee. Nello svolgimento dei calcoli abbiamo usato MATHEMATICA ed il pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1].

```
<< Baricentricas`;
```

```
ptI = {a, b, c}
```

$\{a, b, c\}$

```
ptA0 = SegundaInterseccionCircunferencia[ptI, ptA, ptB, ptC]
```

$\{a^2, -b(b+c), -c(b+c)\}$

```
ptB0 = SegundaInterseccionCircunferencia[ptI, ptB, ptA, ptC]
```

$\{-a(a+c), b^2, -c(a+c)\}$

```
ptC0 = SegundaInterseccionCircunferencia[ptI, ptC, ptA, ptB]
```

$\{-a(a+b), -b(a+b), c^2\}$

```
Ortocentro[{ptA0, ptB0, ptC0}]
```

$\{a, b, c\}$

[1] http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/