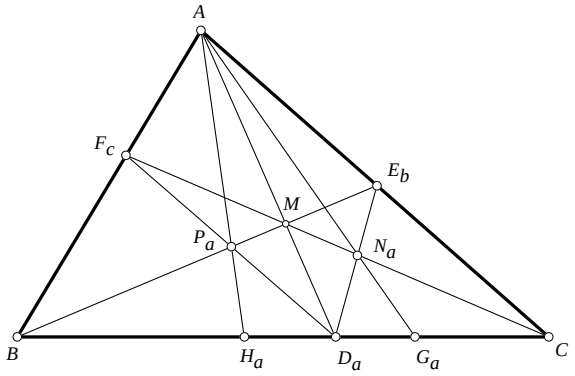
**Problema 509.** Sea $ABC$ un triángulo, y sea $M$ un punto interior, y $D_a$, $E_b$ y $F_c$, los pies de las cevianas que pasan por $M$, y cortan a los lados $BC$, $AC$ y $AB$, respectivamente. Sean los puntos $N_a = CF_c \cap D_aE_b$, y $P_a = BE_b \cap F_cD_a$; prolongamos $AP_a$ y $AN_a$, hasta que corten a $BC$ en $H_a$ y $G_a$, respectivamente. Probar que:

$$\frac{G_aC}{D_aG_a} = \frac{CD_a}{D_aB} + 1$$

*S. Dattatreya y R. Dattatreya (2000), An interesting ratio result for triangles.*

*Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid*

**Soluzione di Ercole Suppa**.




Risolviamo il problema con coordinate baricentriche relative al triangolo $\triangle ABC$. Premettiamo il seguente risultato

Lemma. Siano $P$, $Q$ due punti appartenenti al piano del triangolo $ABC$. Se le coordinate baricentriche (omogenee) di $P$ e $Q$ hanno la stessa somma, allora le coordinate baricentriche del punto $X$ della retta $PQ$ tale che $PX : XQ = m : n$ sono espresse dalla formula

$$X = \frac{n}{n+m}P + \frac{m}{n+m}Q$$

*Dimostrazione.* E' sufficiente consultare un testo di geometria in cui sono trattate le coordinate baricentriche, come ad esempio uno dei seguenti riferimenti:

- Paul Yiu, Introduction to the geometry of the triangle
- Francisco Javier García Capitán, Coordenadas Baricéntricas

Tornando al problema proposto, dette $u : v : w$ le coordinate baricentriche di $M$, i punti $D_a$, $E_b$, $F_c$ hanno coordinate:

$$D_a = (0 : v : w) \quad , \quad E_b = (u : 0 : w) \quad , \quad F_c = (u : v : 0)$$

dove $u, v, w > 0$ in quanto $M$ è interno al triangolo $\triangle ABC$.

Per trovare le coordinate del punto $N_a$ determiniamo le equazioni delle rette $D_aE_b$ e $CF_c$:

$$D_aE_b \ : \ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & v & w \\ u & 0 & w \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad vwx + uwy - uvz = 0 \tag{2}$$

$$CF_c \ : \ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & o \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad vx - uy = 0 \tag{3}$$

Risolvendo il sistema formato dalla (2) e la (3) troviamo che $N_a = (u : v : 2w)$. La retta $AN_a$ ha equazione

$$AN_a \ : \ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ u & v & 2w \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2wy - vz = 0 \tag{4}$$

e il punto $G_a$, intersezione delle rette $BC$ ed $AN_a$, ha coordinate

$$G_a = (0 : v : 2w) = \left(0 : \frac{v}{v+2w} : \frac{2w}{v+2w}\right)$$

Con un facile calcolo si può verificare che

$$D_a = \frac{w}{v+w} \cdot C + \frac{v}{v+w} \cdot B$$
$$G_a = \frac{w}{v+2w} \cdot C + \frac{v+w}{v+2w} \cdot D_a$$

Pertanto, tenuto conto del Lemma, abbiamo:

$$\frac{CD_a}{D_aB} = \frac{v}{w} \qquad , \qquad \frac{CG_a}{G_aD_a} = \frac{v+w}{w} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{G_aC}{D_aG_a} = \frac{CD_a}{D_aB} + 1$$

e la dimostrazione è completa. □

**Osservazione.** Il problema può essere risolto anche per via sintetica, utilizzando il teorema di Ceva[1].

[1] Vedere: S. Dattatreya, R.Dattatreya - An Interesting ratio result for triangles