Problema 518. Sea ABC un triángulo con ángulo mayor en A, y lados $a \geq b \geq c$. Tracemos sobre el interior del lado mayor BC opuesto al ángulo A, los puntos P y Q tales que $BP = a - b$ y $QC = a - c$.

Sean $h_P = PP'$ y $h_Q = QQ'$ las alturas trazadas desde los vértices P y Q de los triángulos ABP y ACQ y sus pies P' y Q'sobre sus lados opuestos AB y AC respectivamente. Probar que :

(a) $PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot QC \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} 90^\circ$

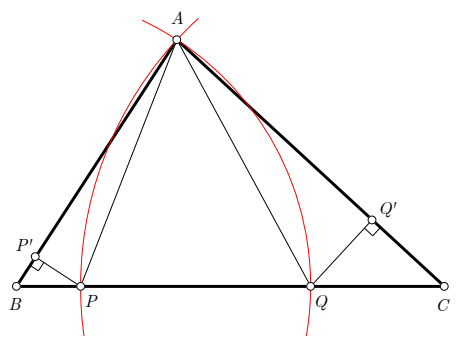
(b) $PQ - (h_P + h_Q) \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} 90^\circ$

(c) ¿Son (a) y (b) dos caracterizaciones equivalentes de la clase de triángulos según los ángulos?

Romero, J.B. (2009): Comunicación personal

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.



Posto $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\Delta = [ABC]$, risulta ovviamente:

$$BP = a - b \qquad , \qquad QC = A - c \tag{1}$$

$$PQ = BC - BP - QC = a - (a - b) - (a - c) = b + c - a \tag{2}$$

$$PP' = BP \cdot \sin B = (a - b)\frac{2\Delta}{b} \tag{3}$$

$$QQ' = QC \cdot \sin C = (a - c)\frac{2\Delta}{c} \tag{4}$$

(a) Da (1),(2) e dal teorema del coseno segue che:

$$\begin{aligned} PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot QC &= (b + c - a)^2 - 2(a - b)(a - c) = \\ &= b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A \end{aligned}$$

e quindi

$$PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot QC \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 90^\circ$$

(b) Usando le formule (1),(2),(3),(4) abbiamo:

$$\begin{aligned}
PQ - (h_P + h_Q) \geq 0 \qquad & \Leftrightarrow \\
b + c - a - (a-b)\sin B - (a-c)\sin C \geq 0 \qquad & \Leftrightarrow \\
b + c - a - (a-b)\frac{2\Delta}{b} - (a-c)\frac{2\Delta}{c} \geq 0 \qquad & \Leftrightarrow \\
ab^2c + abc^2 - a^2bc + 2b^2\Delta + 2c^2\Delta - 2ab\Delta - 2ac\Delta \geq 0 \qquad & \Leftrightarrow \\
abc(b+c-a) \geq 2\left(ab + ac - b^2 - c^2\right)\Delta \qquad & \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Nell'ultima disuguaglianza abbiamo: $(b+c-a) > 0$ in quanto a, b, c sono le lunghezze dei lati di un triangolo e $\left(ab + ac - b^2 - c^2\right) \geq 0$ poichè $a \geq b \geq c$.

Pertanto tale disuguaglianza è equivalente a:

$$a^2b^2c^2(b+c-a)^2 - 4\left(ab + ac - b^2 - c^2\right)^2 \Delta^2 \geq 0 \tag{5}$$

La (5), sostituendo $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = (a+b+c)/2$ (formula di Erone), equivale a

$$(b+c-a)\left(b^2 + c^2 - a^2\right) f(a,b,c) \geq 0 \tag{6}$$

dove abbiamo posto:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) = & a^3b^2 + b^5 + 2a^3bc + a^2b^2c + a^3c^2 + a^2bc^2 + 6ab^2c^2 + c^5 \\
& - a^2b^3 - ab^4 - 2ab^3c - b^4c - a^2c^3 - 2abc^3 - ac^4 - bc^4
\end{aligned} \tag{7}$$

Dimostriamo ora che $f(a,b,c) \geq 0$ per ogni $a, b, c \geq 0$ tali che $a \geq b \geq c$. A tal proposito osserviamo che esistono due numeri $x, y \geq 0$ tali che $b = c + x$ e $a = c + x + y$. Sostituendo $b = c + x$ e $a = c + x + y$ nella (7) otteniamo:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) = & 4c^5 + x^2y^2(2x+y) + 4c^4(4x+3y) + 3c^3\left(7x^2 + 12xy + 4y^2\right) + \\
& + cxy\left(6x^2 + 13xy + 4y^2\right) + c^2\left(8x^3 + 29x^2y + 24xy^2 + 4y^3\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Pertanto la (6) equivale a

$$(b+c-a)\left(b^2 + c^2 - a^2\right) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$2(b+c-a)bc \cdot \cos A \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \leq 90^\circ$$

In modo analogo (i calcoli sono gli stessi!) si dimostra l'altra equivalenza:

$$PQ - (h_P + h_Q) \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \geq 90^\circ$$

$\square$