Problema 519. Una circunferencia que pasa por el vértice A de un triángulo ABC, interseca el lado AB en P, y el lado AC en Q, con PQ non parallela a BC. Tomamos dos puntos, M sobre PB y N sobre QC tales que

$$PM : MB = QN : NC$$

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos APQ, AMN, ABC concurren en un punto X distinto de A.

Suppa, E. (2009) Comunicación personal.

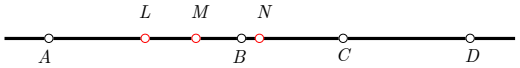
Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico A. Einstein, 64100 Teramo, Italia

Soluzione di Ercole Suppa. Premettiamo i seguenti lemmi:

Lemma 1. Siano A, B, C, D quattro punti di una retta orientata, presi in quest'ordine. Se L, M, N sono i rispettivi punti medi di AB, AC, AD abbiamo:

$$\frac{LM}{MN} = \frac{BC}{CD}$$

Dimostrazione.



Fissiamo sulla retta un sistema di coordinate cartesiane e indichiamo con a, b, c, d le ascisse di A, B, C, D. I punti L, M, N hanno coordinate

$$\frac{a+b}{2} \quad , \quad \frac{a+c}{2} \quad , \quad \frac{a+d}{2}$$

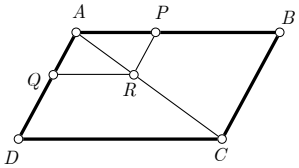
Pertanto:

$$\frac{LM}{MN} = \frac{\frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2}}{\frac{a+d}{2} - \frac{a+c}{2}} = \frac{c-b}{d-c} = \frac{BC}{CD} \qquad \blacksquare$$

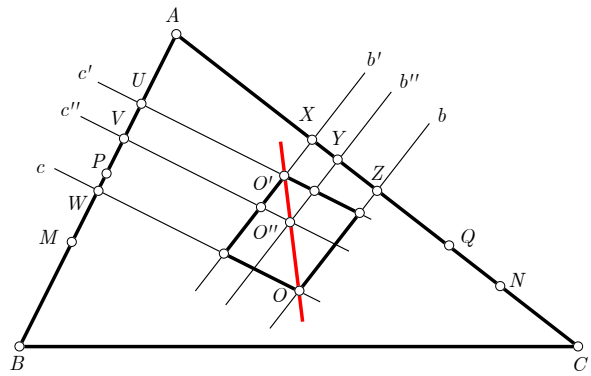
Lemma 2. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Prendiamo sui lati AB e AD due punti P e Q tali che $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD}$ e indichiamo con R il punto di intersezione tra la parallela per P ad AD e la parallela per Q ad AB. I punti A, R, C sono allineati.

Dimostrazione.

Basta osservare che C è l'immagine di R nell'omotetia di centro A e rapporto $k = \frac{AB}{AP}$ $\blacksquare$



Dimostriamo ora il problema proposto.



Indichiamo nell'ordine, come indicato in figura, con

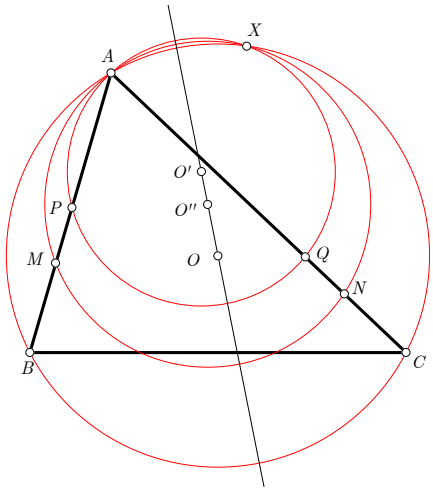
- U, V, W, X, Y, Z i punti medi di AP, AM, AB, AQ, AN, AC;
- b, b', b'', c, c', c'' gli assi dei segmenti AC, AQ, AN, AB, AP, AM;
- $O = b \cap c$, $O' = b' \cap c'$, $O'' = b'' \cap c''$ i centri delle circonferenze circonscritte ai triangoli ABC, APQ, AMN.

Per il Lemma 1 abbiamo

$$\frac{UV}{VW} = \frac{PM}{MB} = \frac{QN}{NC} = \frac{XY}{YZ} \tag{1}$$

Dalla (1), tenuto conto del teorema di Talete e del Lemma 2, discende che i punti O, O', O'' sono allineati.

Poichè $PQ \nparallel BC$ le circonferenze (O) ed (O') si intersecano in un ulteriore punto $X \neq A$.



Poichè OO' è l'asse di AX ed $O'' \in OO'$, abbiamo $O''A = O''X$ e questo prova che anche la circonferenza (O'') passa per il punto X. $\square$