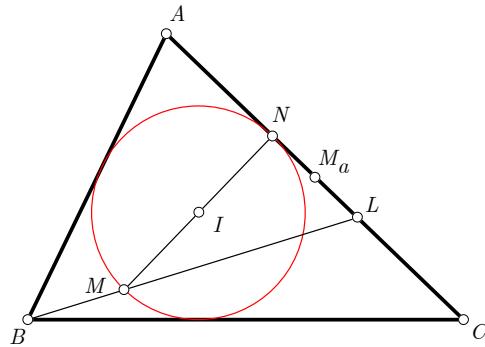


**Problema 524.** Sea  $ABC$  un triángulo. Sea  $N$  el punto de contacto de la circunferencia inscrita con  $AC$ . Sea  $MN$  el diámetro perpendicular a  $AC$  en la circunferencia inscrita. Sea  $L$  la intersección de  $BM$  con  $AC$ . Demostrar que  $AN = LC$ .

*Soifer,A. (2009) Mathematics as Problem Solving, Springer*

*Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el Liceo Scientifico Sperimentale annesso al Liceo Ginnasio "T.L. Caro", 84087 Sarno, Italia*

**Soluzione di Ercole Suppa.**



Risolviamo il problema analiticamente utilizzando coordinate baricentriche omogenee. I vertici e l'incentro del triangolo  $\triangle ABC$  hanno coordinate

$$A(1 : 0 : 0), \quad B(0 : 1 : 0), \quad C(0 : 0 : 1), \quad I(a : b : c)$$

Per trovare le coordinate di  $N$  ed  $M$  ricordiamo che, se le coordinate di due punti  $P$  e  $Q$  hanno la stessa somma, allora le coordinate del punto  $X$  della retta  $PQ$  tale che  $PX : XQ = m : n$  si ottengono con la formula

$$X = \frac{n}{m+n}P + \frac{m}{m+n}Q \quad (*)$$

Nel nostro caso, tenuto conto che  $AN : NC = s - a : s - c$  (con  $s$  indichiamo il semiperimetro di  $\triangle ABC$ ), abbiamo:

$$N = \frac{s-c}{2s-a-c}A + \frac{s-a}{2s-a-c}C = (a+b-c : 0 : -a+b+c)$$

Per calcolare le coordinate di  $M$ , se vogliamo usare la formula (\*), dobbiamo scrivere  $N$  ed  $I$  in modo che le loro coordinate abbiano la stessa somma:

$$N(2s(a+b-c) : 0 : 2s(-a+b+c)) , \quad I(2ab : 2b^2 : 2bc)$$

Tenuto conto che  $NM : MI = 2 : -1$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} M &= -N + 2I = -(2s(a+b-c) : 0 : 2s(-a+b+c)) + 2(2ab : 2b^2 : 2bc) = \\ &= (c^2 - a^2 - b^2 + 2ab : 4b^2 : a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \end{aligned}$$

La retta  $BM$  ha equazione:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 0 & 1 & 0 & \\ c^2 - a^2 - b^2 + 2ab & 4b^2 & a^2 - b^2 - c^2 + 2bc & \end{array} \right| = 0 \iff$$

$$(a+b-c)x + (a-b-c)z = 0$$

Le coordinate del punto  $L = AC \cap BM$  si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ (a+b-c)x + (a-b-c)z = 0 \end{cases} \Rightarrow L(-a+b+c : 0 : a+b-c)$$

Il punto medio  $K$  del segmento  $LN$  ha coordinate:

$$K = \frac{1}{2} \cdot N + \frac{1}{2} \cdot L = \frac{1}{2}(-a+b+c : 0 : a+b-c) + \frac{1}{2}(a+b-c : 0 : -a+b+c) = (1 : 0 : 1)$$

e pertanto coincide col punto medio  $M_a$  del segmento  $AC$ . Ne segue che

$$AN = AM_a - NM_a = M_aC - M_aL = LC$$

e la dimostrazione è completa.  $\square$