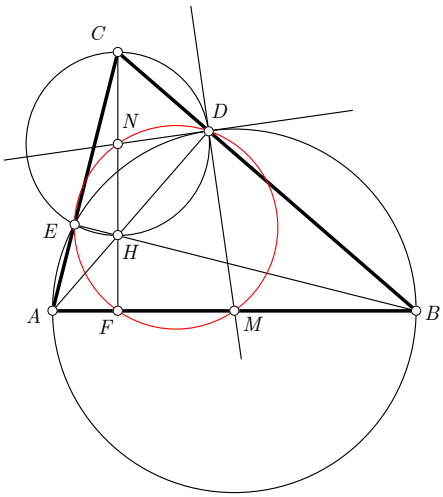
Problema 525. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de diámetros CH y AB son ortogonales.

Alasia, C. (1900): La recente geometria del triangolo, problema 195, pag. 293

Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein", 64100 Teramo, Italia

Soluzione di Ercole Suppa.



Siano D, E, F i piedi delle altezze condotte rispettivamente dai vertici A, B, C rispettivamente, sia H l'ortocentro e siano M, N i punti medi di AB e CH, come indicato in figura. I cerchi (M), (N) di diametri AB, CH passano per i punti D, E e, per dimostrare che essi sono ortogonali, basta verificare che $DM \perp DN$.

Dato che $MB = MD$ il triangolo $\triangle MBD$ è isoscele sulla base BD per cui $\angle MDB = \angle MBD$. Dal teorema dell'angolo esterno segue che:

$$\angle FMD = 2 \cdot \angle ABD = 2B \tag{1}$$

Analogamente, dal triangolo isoscele $\triangle NDH$, discende che

$$\angle NDH = \angle NHD = \angle AHF = 90^\circ - \angle DAB = \angle ABC = B \qquad \Rightarrow$$

$$\angle FND = 180^\circ - 2 \cdot \angle NDH = 180^\circ - 2B \tag{2}$$

La (1) e la (2) implicano che

$$\angle FMD + \angle FND = 180^\circ$$

e quindi che il quadrilatero $FMDN$ è ciclico. Pertanto

$$\angle NDM = 180^\circ - \angle NFM = 90^\circ \qquad \Rightarrow \qquad DM \perp DN$$

e questo prova che i cerchi (M) ed (N) sono ortogonali. $\square$