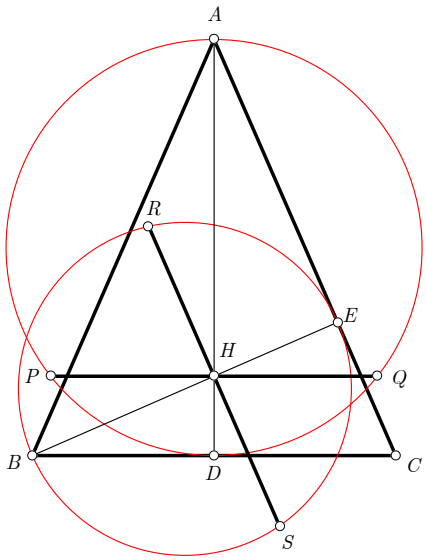
Problema 530. Sea ABC un triángulo isósceles. Se trazan tres circunferencias de diámetros las alturas. En cada una de ellas se traza la cuerda perpendicular por el ortocentro a la altura correspondiente. Demostrar que las tres cuerdas obtenidas tienen la misma longitud.

Komal, Mayo (*2009*), *problem* B4186.

Soluzione di Ercole Suppa.



Siano D, E, F i piedi delle altezze tracciate dai vertici A, B, C e sia H l'ortocentro di ABC; siano P, Q (risp. R, S) i punti di intersezione della circonferenza di diametro AD (risp. BE) con la retta perpendicolare ad AD (risp. BE) passante per H, come indicato in figura.

Supponiamo che il triangolo ABC sia isoscele sulla base BC, ossia che $AB = AC$. Pertanto l'altezza AD è anche mediana, per cui $BD = DC$.

Dalla similitudine dei triangoli BEC e BDH abbiamo:

$$HD : BD = EC : BE \qquad \Rightarrow$$

$$HD = \frac{BD \cdot EC}{BE} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cos C}{a \sin C} = \frac{a}{2} \cot C \tag{1}$$

$$AH = AD - HD = \frac{a}{2} \cot C - \frac{a}{2} \cot C = \frac{a}{2}(\tan C - \cot C) \tag{2}$$

Dal teorema delle corde relativo alla circonferenza di diametro AD abbiamo:

$$PH \cdot HQ = AH \cdot HD = \frac{a}{2}(\tan C - \cot C) \cdot \frac{a}{2} \cot C = \frac{a^2}{4}\left(1 - \cot^2 C\right) \tag{3}$$

Utilizzando nuovamente la similitudine dei triangoli BEC e BDH abbiamo:

$$BH : BD = BC : BE \qquad \Rightarrow$$

$$BH = \frac{BD \cdot BC}{BE} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{a \sin C} = \frac{a}{2 \sin C} \tag{4}$$

$$HE = BE - BH = a \sin C - \frac{a}{2 \sin C} = a \cdot \frac{2 \sin^2 C - 1}{2 \sin C} \tag{5}$$

Dal teorema delle corde relativo alla circonferenza di diametro BE abbiamo:

$$RH \cdot HS = BH \cdot HE = \frac{a}{2 \sin C} \cdot a \frac{2 \sin^2 C - 1}{2 \sin C} = a^2 \cdot \frac{2 \sin^2 C - 1}{4 \sin^2 C} \tag{6}$$

Da (3) e (6), tenuto conto dell'identità

$$1 - \cot^2 C = \frac{2 \sin^2 C - 1}{\sin^2 C}$$

otteniamo che

$$PH \cdot HQ = RH \cdot HS \qquad \Rightarrow \qquad PH^2 = RH^2 \qquad \Rightarrow$$

$$PH = RH \qquad \Rightarrow \qquad PQ = 2 \cdot PH = 2 \cdot RH = RS$$

In modo analogo si dimostra che nel cerchio di diametro CF la corda TU passante per H e perpendicolare a detto diametro, ha la stessa lunghezza delle corde PQ ed RS. $\square$