

Problema 559.

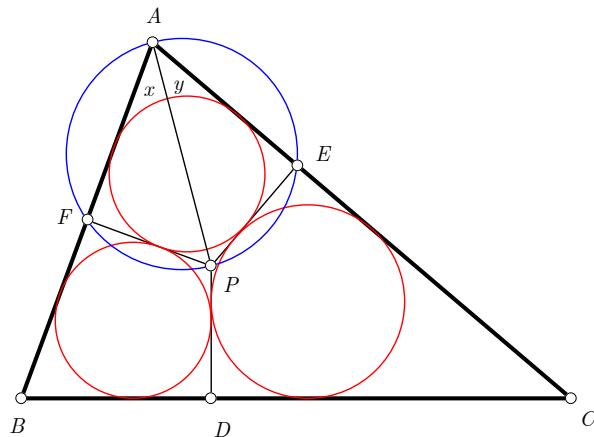
Sea P un punto del interior del triángulo ABC . Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB , respectivamente. Si los tres cuadriláteros $AEPF, BFPD$ y $CDPE$ tienen incírculos tangentes a los cuatro lados, demostrar que P es el incentro de ABC .

Stanley Rabinowitz, Crux Mathematicorum, Problem 2902, v.30, n.1(2004)38

In memoriam, al profesor Gennaro Rispoli.

Soluzione di Ercole Suppa.

Siano $x = \angle PAF, y = \angle PAE$ come indicato in figura.



Dal quadrilatero ciclico $PEAF$ abbiamo:

$$PF = AP \sin x, \quad PE = AP \sin y \quad (1)$$

$$AF = AP \sin(90^\circ - x) = AP \cos x, \quad AE = AP \sin(90^\circ - y) = AP \cos y \quad (2)$$

Poichè $PEAF$ è circoscrivibile abbiamo

$$AF + PE = AE + PF \quad (3)$$

Dalle (1),(2),(3) discende che

$$\cos x + \sin y = \cos y + \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = \cos y - \sin y \Rightarrow$$

$$1 - \sin 2x = 1 - \sin 2y \Rightarrow x = y$$

Allora P appartiene alla bisettrice dell'angolo $\angle A$ e, analogamente, si dimostra che P appartiene alle bisettrici degli angoli $\angle B$ e $\angle C$. Pertanto P è l'incentro di $\triangle ABC$ e il problema è risolto. \square