

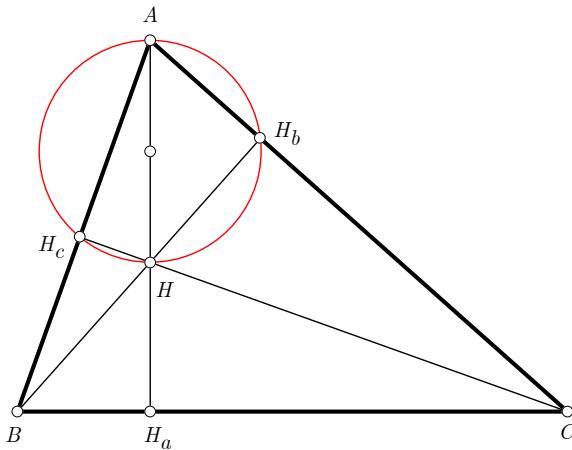
**Problema 593.**

Dado el triángulo acutángulo  $ABC$ , sean  $H_a, H_b, H_c$  los pies de las alturas trazadas desde los vértices  $A, B, C$  respectivamente. Si denotamos por  $r, R, t_a, t_b, t_c$  el inradio de  $ABC$  y los circunradios de los triángulos  $ABC, H_bAH_c, H_aH_cB, H_aCH_b$  demostrar que:

$$3r \leq t_a + t_b + t_c \leq \frac{3}{2}R \quad (*)$$

*Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico 'A. Einstein' Teramo, Italia*

**Soluzione di Ercole Suppa.**



Indichiamo con  $H$  l'ortocentro del triangolo  $ABC$ . Dai triangoli rettangoli  $ABH_a$  e  $HBH_a$  otteniamo  $AH_a = c \sin B$ ,  $BH_a = c \cos B$ ,  $HH_a = c \cos B \cot C$  e, di conseguenza

$$\begin{aligned} AH &= AH_a - HH_a = c \sin B - c \cos B \cot C = \\ &= c \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin C} = \\ &= c \frac{-\cos(B+C)}{\frac{c}{2R}} = 2R \cos A \end{aligned}$$

Pertanto  $t_a = AH/2 = R \cos A$  e analoghe relazioni valgono per  $t_b$  e  $t_c$ .

Dalla nota identità  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$  e dalla diseguaglianza di Eulero:  $R \geq 2r$ , segue che

$$t_a + t_b + t_c = R(\cos A + \cos B + \cos C) = R \left(1 + \frac{r}{R}\right) = R + r \geq 3r$$

Dalle formule di Briggs

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

e dalla nota identità

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

discende che

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\ &= 1 + 4 \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \\ &= 1 + \frac{r}{R} \leq 1 + \frac{r}{2r} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pertanto

$$t_a + t_b + t_c = R(\cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{3}{2}R$$

e la diseguaglianza (\*) risulta dimostrata.  $\square$