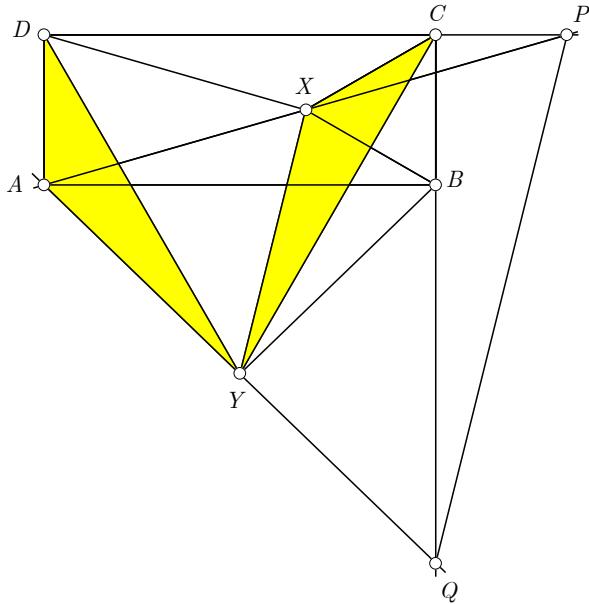


**Problema 663.** Sea  $ABCD$  un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros  $BCX$  y  $DCY$  de modo que estos triángulos comparten algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Las rectas  $AX$  y  $CD$  se cortan en  $P$ , y las rectas  $AY$  y  $BC$  se cortan en  $Q$ . Probar que el triángulo  $APQ$  es equilátero.

*XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Cochabamba (Bolivia, 2012)*

**Soluzione di Ercole Suppa.**



Si dimostra facilmente che  $XA = XD$  e  $YA = YB$ , dato che  $\triangle BCX$  è equilatero. Inoltre  $X$  ed  $Y$  sono punti medi di  $AP$  e  $AQ$  rispettivamente, in quanto:

$$\angle DPX = 90^\circ - \angle DAP = 90^\circ - \angle XDA = \angle XDP \Rightarrow XA = XD = XP$$

$$\angle YQB = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle ABY = \angle YBQ \Rightarrow YA = YB = YQ$$

Osserviamo che  $\triangle DAY \cong \triangle CXY$  per il primo criterio di congruenza, essendo:

$$AD = BC = CX, \quad DY = CY, \quad \angle ADY = 30^\circ = \angle XCY$$

Pertanto

$$YA = YX \tag{1}$$

$$\angle AYD = \angle XYC \tag{2}$$

Dalla (2) discende che

$$\angle AYX = \angle AYD + \angle DYX = \angle XYC + \angle DYX = \angle DYC = 60^\circ \tag{3}$$

Da (1) e (3) discende che  $\triangle AXY$  è equilatero. Pertanto, essendo  $XA = XP$  e  $YA = YQ$ , anche  $\triangle APQ$  è equilatero.  $\square$