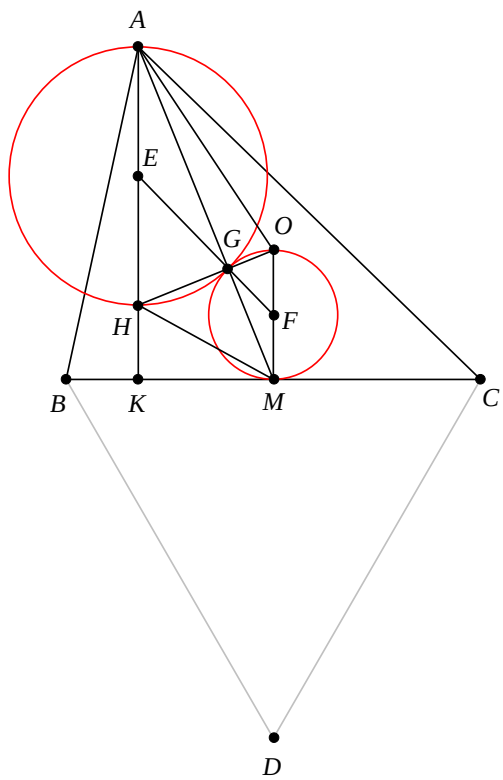
Problema 877. Sea BCD un triángulo equilátero. Sea M el punto medio de BC. Tracemos $AM = MD$. Sean G, O, H el baricentro, circuncentro y ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de diámetros AH y MO son tangentes en G.

Suppa, E. (2018) : Comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa. Sea K el pie de la perpendicular de A en BC y sean E, F los puntos medios de AH y OM respectivamente.



Denotamos como de costumbre $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $R = AO$, $\Delta = [ABC]$.

Siendo $\triangle BCD$ equilátero tenemos $AM = MD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por otro lado, para el teorema de la mediana $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, entonces

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad \Leftrightarrow \qquad b^2 + c^2 = 2a^2 \tag{1}$$

Por lo tanto $\angle BAC < 90°$ siendo

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{2bc} > 0$$

Mostramos ahora que los triángulos $\triangle AGH$ y $\triangle AKM$ son semejantes: de hecho, siendo $AH = 2R\cos A$, tenemos

$$\frac{AH}{AG} = \frac{2R\cos A}{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{6R\cos A}{\sqrt{3}a} = 6\cdot\frac{abc}{4\Delta}\cdot\frac{a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4\Delta}$$

$$\frac{AM}{AK} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{a}{2\Delta} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4\Delta}$$

entonces

$$\frac{AH}{AG} = \frac{AM}{AK} \qquad \Rightarrow \qquad \triangle AGH \sim \triangle AKM$$

Per lo tanto $\angle AGH = \angle OGM = \angle AKM = 90°$ de lo cual sigue que el baricentro G pertenece a las circunferencias (E) y (F) de diámetros AH y OM respectivamente.

Finalmente observamos que, siendo $\triangle AGH \sim \triangle MGO$ tenemos

$$\frac{AH}{AG} = \frac{MO}{MG} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{AE}{AG} = \frac{MF}{MG}$$

de donde se deduce que $\triangle AEG \sim \triangle MFG$.

Entonces $\angle AGE = \angle MGF$ y los puntos E, G, F están alineados.

Siendo E, G, F alineados y $G \in (E)\cap(F)$ los círculos (E) y (F) son tangentes en el punto G y así hemos terminado. $\square$